Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática

Existencia de solución débil de un problema semilineal elíptico

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Edwar Augusto ROJAS BAZÁN

ASESOR

Víctor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2016

Referencia bibliográfica

Rojas, E. (2016). *Existencia de solución débil de un problema semilineal elíptico*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

1417

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Académico-Profesional de Matemática

XI
139

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...17:00.. horas del día viernes 2 de setiembre de 2016, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Presidente), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (Miembro), Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA SEMILINEAL ELÍPTICO», presentado por el señor Bachiller EDWAR AUGUSTO ROJAS BAZÁN, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

Sobresaliente con mención (20). Veinte

A continuación el Presidente del Jurado, Dr. José Raúl Luyo Sánchez, manifestó que el señor Bachiller EDWAR AUGUSTO ROJAS BAZÁN, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ...18:00... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. JOSÉ RAÚL LUYO SÁNCHEZ
PRESIDENTE

DRA. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA
MIEMBRO

DR. VÍCTOR RAFAEL CABANILLAS ZANNINI
MIEMBRO ASESOR

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL DE UN

PROBLEMA SEMILINEAL ELÍPTICO

Edwar Augusto Rojas Bazán

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
Presidente del Jurado

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro del Jurado

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Miembro Asesor

Lima - Perú

Setiembre - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

ROJAS BAZÁN, EDWAR AUGUSTO

Existencia de solución débil de un problema semilineal elíptico, (Lima) 2016.

xi, 139 p., 29,7cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2016).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM - Facultad de Ciencias Matemáticas

II. Existencia de solución débil de un problema semilineal elíptico (Ecuaciones diferenciales parciales).

Dedico este trabajo a mis padres, Augusto y Marcelina y a mis hermanas Melissa y Nancy.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Augusto y Marcelina y a mi hermana Melissa por haber sido muy pacientes conmigo. Sin su apoyo incondicional no hubiera sido posible llevar a cabo este trabajo. También agradezco a mi tío Esteban por su apoyo para terminar la tesis.

De igual manera agradezco a mi amigo y colega Dr. Rafael Cabanillas Zannini por haber aceptado dirigir este trabajo, por la dedicación en el asesoramiento de la tesis, por las sugerencias que contribuyeron a mejorar este trabajo, por la paciencia y valiosos consejos para la exposición del trabajo, por haberme proporcionado dos libros que están en la bibliografía los cuales fueron de mucha utilidad para el teorema principal de la tesis y por su apoyo.

Mi agradecimiento al Dr. José Luyo Sánchez y la Dra. Yolanda Santiago Ayala por sus importantes sugerencias y recomendaciones hechas a este trabajo.

Doy gracias a mis amigos los profesores Félix Pariona Vilca y Luz Malásquez Chamba por su apoyo moral y consejos para culminar el trabajo.

Agradezco a cada uno de los profesores que tuve en pregrado por mi formación académica y profesional. En especial a los profesores Aurora Pineda Mejía y Pedro Espinoza Haro por sus valiosas enseñanzas y consejos, gracias maestros.

Agradezco a mi amigo el profesor César Rojas Romero por la traducción del “Resumen” al idioma inglés.

Finalmente, agradezco a mi cuñado Roberto Pretell por la ayuda en la elaboración del gráfico y la numeración en romanos y arábigos de las páginas de esta tesis.

RESUMEN

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA SEMILINEAL ELÍPTICO

Edwar Augusto Rojas Bazán

Setiembre - 2016

Orientador: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo se prueba la existencia de la solución débil del problema de Dirichlet semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x) & en\ \Omega \\ \quad u = 0 & sobre\ \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio (abierto y conexo) acotado en $\mathbb{R}^N$ de clase C^2, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface ciertas condiciones y $h \in L^p(\Omega)$.

La existencia de la solución débil de (1) se prueba por medio del siguiente resultado: todo funcional definido en un espacio de Banach que tiene mínimo y es Fréchet diferenciable en dicho espacio, posee un punto crítico. En nuestro trabajo construiremos un funcional sobre $H_0^1(\Omega)$ cuyo punto crítico será la solución débil de (1).

Palabras claves: Funcional secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente
La derivada de Fréchet
Función de Nemytskii
Función coerciva
Solución débil
Ecuación semilineal elíptica

ABSTRACT

EXISTENCE OF WEAK SOLUTION TO AN ELLIPTIC

SEMILINEAR PROBLEM

Edwar Augusto Rojas Bazán

September – 2016

Advisor: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Title Obtained: Licentiate in Mathematics

In this work we prove the existence of weak solution to the semilinear Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x) & in\ \Omega \\ \quad u = 0 & on\ \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a domain of class C^2 (open and connected) bounded in $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function verifying some conditions and $h \in L^p(\Omega)$.

The existence of the weak solution to (1) is proved using the following result: every functional defined on a Banach space, having minimum and being Fréchet differentiable in that space, has a critical point. In our work we will construct a functional on $H_0^1(\Omega)$ whose critical point will be the weak solution to (1).

Key words: Lowerly weak sequentially semicontinuous functional

Fréchet derivative

Nemytskii function

Coercive function

Weak solution

Elliptic semilinear equation

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es demostrar la existencia de soluciones débiles del problema de Dirichlet semilineal:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x) & en\ \Omega\,, \\ \quad u = 0 & sobre\ \ \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1}$$

Donde Ω es un dominio (abierto y conexo) acotado en $\mathbb{R}^N$ de clase C^2, p es un número tal que $p > \frac{2N}{N+2}$ si $N \geq 2$, $p > 1$ si $N = 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface ciertas condiciones y $h \in L^p(\Omega)$.

La existencia de la solución débil de (1) se prueba de la siguiente forma, se define: un funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de tal manera que los puntos críticos de Φ son las soluciones débiles de (1), luego el problema se reduce a demostrar la existencia de los puntos críticos de Φ, para lo cual se demuestra que Φ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente, coercivo y Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$, con lo cual se prueba la existencia de tales puntos críticos.

Nuestro trabajo está basado en el artículo $[6]$ de D. G. de Figueiredo y J.- P. Gossez. Presentamos un estudio detallado de una parte de dicho artículo, para lo cual hemos incluido la demostración de varios resultados que el citado artículo no contenía, como el teorema de minimización de funcionales secuencialmente semicontinuos inferiormente débilmente y el teorema de equimedibilidad, entre otros.

El trabajo está dividido en seis capítulos. El primer capítulo, incluye algunas definiciones y resultados de análisis funcional, medida e integración, espacios $L^p(\Omega)$, espacios de Sobolev (en particular inmersión de Sobolev) y de valores propios y funciones propias de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea.

En el segundo capítulo se definen los funcionales secuencialmente semicontinuos inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.) y la derivada de Fréchet. Se prueban algunos resultados básicos de funcionales s.s.c.i.d. y derivada de Fréchet. En la parte final de este capítulo se prueba que todo funcional s.s.c.i.d., coercivo y Fréchet diferenciable en un espacio de Banach reflexivo posee punto crítico.

En el tercer capítulo se prueban algunos resultados básicos de la función de Nemytskii. Luego se prueba que el funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y se calcula la derivada de Fréchet de Φ .

En el cuarto capítulo se estudia el reordenamiento de Schwarz de una función. Se demuestran las propiedades básicas del reordenamiento de Schwarz, varias de estas propiedades están enunciadas sin demostración en [4] de C. Bandle y hay otras que están dadas sin demostración en el artículo [6]. Al final de este capítulo se prueba una desigualdad que involucra la medida de Lebesgue de los conjuntos $u^{-1}(B)$, B y la constante de Lipschitz de u, siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, conexo, acotado y no vacío, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz no constante en $\overline{\Omega}$ la cual se anula en $\partial\Omega$ y B un conjunto de Borel en el rango de u. La prueba de esta desigualdad se hará según en el artículo [6] y aplicando los resultados del reordenamiento de Schwarz. Dicha desigualdad se usa para probar que el funcional Φ es coercivo.

El quinto capítulo se desarrollará según el artículo [6]. En este capitulo presentamos el problema de Dirichlet semilineal (1). Luego, bajo ciertas condiciones sobre la función f se prueba un teorema que garantiza, para todo $h \in L^p(\Omega)$ la existencia de por lo menos una solución débil de (1), casi toda la demostración de dicho teorema se hará siguiendo el artículo [6]. Y por último se dan algunos ejemplos de funciones f de tal manera que para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema (1) tiene por lo menos una solución débil, estos ejemplos son nuevas variantes de los ejemplos dados en el artículo [6].

Finalmente en el sexto capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

I.1 ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

ESPACIOS DE BANACH

Definición I.1.1. Una *norma* en un espacio vectorial real E es una función real $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ que asocia a cada vector $x \in E$ el número real $\|x\|$, llamado *norma* de x y que satisface las siguientes condiciones:

i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$,

ii) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,

iii) $\|cx\| = |c|\|x\|$ para todo $x \in E$ y $c \in \mathbb{R}$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Un *espacio normado* es un espacio vectorial E con una norma definida en E.

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado E converge a $x_0 \in E$, lo que denotamos por $x_n \to x_0$ en E, si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 .$$

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado E es llamado una sucesión de Cauchy si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Un espacio normado E es un *espacio de Banach*, si toda sucesión de Cauchy en E converge a algún elemento de E.

CONJUNTO ABIERTO Y CERRADO

Definición I.1.2. Sea E un espacio normado. Dado $r > 0$ y $x \in E$, el conjunto

$$B_r(x) = \{\, y \in E \ / \ \|y - x\| < r \,\}$$

es llamado *bola abiert*a de centro x y radio r.

Un subconjunto $A \subseteq E$ se dice *abierto*, si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que

$$B_r(x) \subseteq A.$$

Sea A un subconjunto de E, el conjunto

$$\bar{A} = \{ x \in E \,/\, B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \,, \ \ \forall \varepsilon > 0 \}$$

es llamado la *cerradura* de A.

Un subconjunto K de E se dice *cerrado* si el conjunto $E \setminus K$ es un conjunto abierto.

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

La bola abierta $B_r(x)$ es un conjunto abierto para todo $x \in E$ y para todo $r > 0$.

$\overline{B_r(x)} = \{ y \in E \,/\, \|y - x\| \leq r\}$ para todo $x \in E$ y para todo $r > 0$.

Sea K un subconjunto de E. El conjunto K es cerrado si, y solamente si, $\overline{K} = K$.

NORMAS EQUIVALENTES

Definición I.1.3. Dos normas diferentes $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ en un espacio vectorial E son *equivalentes* si existen dos constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in E.$$

CONJUNTO DENSO Y ESPACIO SEPARABLE

Definición I.1.4. Sea E un espacio normado, un subconjunto S de E es llamado *denso* en E, si $\bar{S}^{\| \ \|_E} = E$. El espacio normado E es llamado *separable*, si existe un subconjunto de E numerable y denso en E.

OPERADORES E INMERSIONES

Sean E y F dos espacios normados.

Definición I.1.5. El operador $f: E \to F$ es *lineal*, si

$$f(rx + sy) = rf(x) + sf(y) \quad \text{para todo } r, s \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x, y \in E.$$

Definición I.1.6. El operador $f: E \to F$ es *continuo* en $x \in E$, si para toda sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $x_n \to x$ en E se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ en F. El operador $f: E \to F$ es continuo (ó continuo en E), si f es continuo en cada $x \in E$.

El operador $f: E \to F$ es *acotado*, si $f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$ es acotado en F siempre que A es acotado en E (un conjunto acotado en un espacio normado es uno que está contenido en la bola $B_r(0)$ para algún r).

Definición I.1.7. Sean E y F dos espacios normados. El operador $f: E \to F$ es *compacto*, si para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en E existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}$ de $\{f(x_n)\}$ que converge hacia un punto de F.

También se cumple que todo operador lineal y compacto es un operador continuo.

Definición I.1.8. Sean E y F dos espacios normados, se dice que el operador $I: E \to F$ es una *inmersión continua*, siempre que:

i) E es un subespacio vectorial de F, y

ii) el operador $I: E \to F$ es el operador identidad (es decir $I(x) = x$ para todo $x \in E$) y es continuo.

Como I es lineal, (ii) es equivalente a la existencia de una constante $M \geq 0$ tal que

$$||I(x)||_F \leq M||x||_E \quad \text{para todo } x \in E.$$

Se denota la inmersión continua $I: E \to F$ por

$$E \to F$$

Cuando $I: E \to F$ es una inmersión continua, se dirá que el espacio normado E está inmerso continuamente en el espacio normado F.

Definición I.1.9. Sean E y F dos espacios normados, se dice que el operador $I: E \to F$ es una *inmersión compacta*, siempre que:

i) E es un subespacio vectorial de F, y

ii) el operador $I: E \to F$ es el operador identidad y es compacto.

Se denota la inmersión compacta $I: E \to F$ por

$$E \overset{c}{\to} F$$

Cuando $I: E \to F$ es una inmersión compacta se dirá que E está inmerso compactamente en F.

EL ESPACIO DUAL

Definición I.1.10. Un *funcional* sobre un espacio vectorial E es una función real $f: E \to \mathbb{R}$ definida sobre E.

Sea E un espacio normado, se denota por E' el *espacio dual* de E y se define por

$$E' = \{f: E \to \mathbb{R} \ / \ f \ es \ un \ funcional \ lineal \ y \ continuo \ sobre \ E\}.$$

La norma sobre el dual E' se define por

$$\|f\|_{E'} = \underset{\substack{x\in E\\ x\neq 0}}{Sup}\frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|}$$

para todo $f \in E'$, donde $\langle f,x\rangle$ denota $f(x)$.

El espacio E' con la norma $\|\ \ \|_{E'}$ es un espacio de Banach (aun cuando E no lo es). La norma $\|\ \ \|_{E'}$ se llama *norma dual* de E.

TEOREMA DE HAHN – BANACH

Proposición I.1.11. Sea E un espacio normado. Para todo $x \in E$ se tiene

$$\|x\| = \underset{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leq 1}}{Sup}|\langle f,x\rangle| = \underset{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leq 1}}{Max}|\langle f,x\rangle|.$$

Demostración. Ver corolario 1.4 en Brezis [5].

Teorema I.1.12. (Hahn – Banach, segunda forma geométrica). Sean E un espacio normado, $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe $f \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle f,x\rangle \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall\, x \in A \;\text{ y }\; \langle f,x\rangle \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall\, x \in B.$$

En particular

$$\langle f,x\rangle < \alpha < \langle f,y\rangle \quad \forall x \in A,\ \ \forall y \in B.$$

Demostración. Ver teorema I.7 en Brezis [5].

Corolario I.1.13. Sea G un espacio de Banach y sea B un subconjunto de G. Supongamos que para cada $f \in G'$ el conjunto $f(B) = \{\,\langle f,x\rangle \,/\, x \in B\,\}$ es acotado (en $\mathbb{R}$). Entonces B es acotado.

Demostración. Ver corolario II.3 en Brezis [5].

ESPACIOS REFLEXIVOS

Sea E un espacio de Banach y sea E' su dual dotado de la norma dual

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\le 1}} |\langle f, x\rangle| \,.$$

Sea $E'' = (E')'$ su *bidual* dotado de la norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\le 1}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Sea $x \in E$ fijo, la aplicación $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de E' en $\mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo sobre E', es decir un elemento de E''.

Se define la *inyección canónica* $J : E \to E''$ como sigue: para cada $x \in E$ fijo, se define $Jx : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle Jx, f\rangle_{E'', E'} = \langle f, x\rangle_{E', E} \quad \forall f \in E'.$$

Así pues,

$$\langle Jx, f\rangle_{E'', E'} = \langle f, x\rangle_{E', E} \quad \forall x \in E\,, \qquad \forall f \in E'.$$

J tiene las siguientes propiedades:

i) J es lineal y

ii) $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E \quad \forall x \in E.$

Definición I.1.14. Sea E un espacio de Banach y J la inyección canónica de E en E''. Se dice que E es un espacio *reflexivo* si $J(E) = E''$.

Teorema I.1.15. Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y sólo sí $B_E = \{\, x \in E \ / \ \|x\| \le 1 \,\}$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E')$.

Demostración. Ver teorema III.16 en Brezis [5].

Teorema I.1.16. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y $x \in E$ tal que $\{x_{n_k}\}$ converge a x en la topología débil $\sigma(E, E')$.

Demostración. Ver teorema III.27 en Brezis [5].

ESPACIOS DE HILBERT

Definición I.1.17. Sea H un espacio vectorial real. Un *producto interno* en H es una función $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par de vectores $x, y \in H$ un número real (x, y), llamado el *producto interno* de x por y y que satisface las siguientes condiciones:

(i) $(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in H$,

(ii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ para todo $x, y, z \in H$ y para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

(iii) $(x, x) \geq 0$ para todo $x \in H$,

(iv) $(x, x) = 0$ si y solo si $x = 0$.

El producto interno en H define una norma en H dada por

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad \text{para todo } x \in H,$$

la cual se denomina *norma inducida* por el producto interno.

Recordemos que todo producto interno en H verifica la desigualdad de Cauchy –Schwarz:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)} \quad \text{para todo } x, y \in H.$$

Definición I.1.18. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial H dotado de un producto interno $(\ ,\ )$ y que es un espacio de Banach con la norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

De aquí todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

I.2 LOS ESPACIOS $L^p(\Omega)$ Y ALGUNOS RESULTADOS DE MEDIDA E INTEGRACIÓN

Definición I.2.1. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{\ f : \Omega \to \mathbb{R} \ /\ f \ es\ medible\ según\ Lebesgue\ en\ \Omega \\ y \ \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\ \}$$

Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{\ f : \Omega \to \mathbb{R} \ /\ f\ es\ medible\ según\ Lebesgue\ en\ \Omega\ \ y\ existe \\ una\ constante\ C\ \ tal\ que\ \ |f(x)| \leq C\ \ c.t.p.\ en\ \Omega\ \}$$

Cuando no hay ambigüedad, se escribe L^p en lugar de $L^p(\Omega)$ y $\int f$ en lugar de $\int_\Omega f(x)dx$. Como es habitual, se identifican dos funciones de L^p que coinciden en c.t.p.

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$, con la norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \quad , si \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{Inf}\ \{\ C \ / \ |f(x)| \leq C \quad c.t.p. \ \ en \ \ \Omega\ \}$$

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ para c.t.p. en Ω.

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno:

$$(u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega)\,, \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

Teorema I.2.2. (Teorema de la Convergencia Monótona de Beppo Levi).- Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones en $L^1(\Omega)$ tal que $\mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < +\infty$.
Entonces $f_n(x)$ converge para c.t.p. en Ω a un límite finito denotado por $f(x)$.
Además $f \in L^1(\Omega)$ y $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^1} = 0$.

Demostración. Ver teorema IV.1 en Brezis [5].

Lema I.2.3. (Lema de Fatou). Sea $\{\,f_n\,\}$ una sucesión de funciones medibles en Ω. Si existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq g(x)$ para c.t.p. en Ω, entonces

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \quad .$$

Demostración. Ver teorema 5.34 en Wheeden y Zygmund [12].

Teorema I.2.4. (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$. Supongamos que :

a) $f_n(x) \to f(x)$ para c.t.p. en Ω,
b) existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para c.t.p. en Ω.

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Demostración. Ver teorema IV.2 en Brezis [5].

Teorema I.2.5. (Tonelli). Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ dos conjuntos abiertos y sea $F: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < +\infty \quad para\ casi\ todo\ \ x \in \Omega_1$$

y que

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy\ \ dx < +\infty.$$

Entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Demostración. Ver teorema IV.4 en Brezis [5].

Teorema I.2.6. (Fubini). Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos y sea $F: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_2} F(x,y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Igualmente, para casi todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_1} F(x,y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además se verifica

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x,y) dy\ \ dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x,y) dx\ \ dy = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) dx dy\,.$$

Demostración. Ver teorema IV.5 en Brezis [5].

Notación I.2.7. Sea $1 \leq p \leq \infty$; se denota por p' el *exponente conjugado* de p, definido por :

p' es el número real tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, si $1 < p < \infty$

$p' = \infty$, si $p = 1$ y

$p' = 1$, si $p = \infty$.

Teorema I.2.8. (Desigualdad de Hölder). Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demostración. Ver teorema IV.6 en Brezis $[5]$.

Teorema I.2.9. (Desigualdad de Minkowski). Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $f, g \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver teorema IV.7 en Brezis $[5]$ o teorema 2.4 en Adams $[1]$.

Teorema I.2.10. Sean $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que

a) $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ para c.t.p. en Ω.

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ y para c.t.p. en Ω, con $h \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver teorema IV.9 en Brezis $[5]$.

Definición I.2.11. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$; se dice que una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^1_{loc}(\Omega)$, si f es medible según Lebesgue en Ω y $\int_K |f(x)|dx < +\infty$ para todo conjunto compacto $K \subseteq \Omega$. Además se cumple $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y para todo conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Teorema I.2.12. (Teorema de Representación de Riesz). Sean $1 \leq p < \infty$, Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Entonces existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unico tal que

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}\ .$$

Demostración. Ver teorema IV.11 y teorema IV.14 en Brezis [5].

Notación I.2.13. (Notación para la derivada parcial de orden superior)

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N$, α se llama *multi-índice*. El orden de α es

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N .$$

Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N$ multi-índice.

Si $\alpha \neq (0, \dots, 0)$, se denota por $D^\alpha u$ a la derivada parcial de orden $|\alpha|$ de u y cuando esta existe, se define como

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}\ \dots\ \partial x_N^{\alpha_N}} \quad .$$

Si $\alpha = (0, \dots, 0)$,

$$D^\alpha u = u.$$

Definición I.2.14. Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y m un entero no negativo. Se definen los espacios

$C(\Omega) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es continua en } \Omega \,\}$

$C(\overline{\Omega}) = \{\, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es continua en } \overline{\Omega} \,\}$

$C^m(\Omega) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{R} \ /\ D^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N \text{ con } |\alpha| \leq m \,\}$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$$\begin{aligned} C^m(\overline{\Omega}) = \{\, f \in C^m(\Omega) \ /\ & \text{para cada } \alpha \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N \text{ con } |\alpha| \leq m, \\ & \text{existe } g_\alpha \in C(\overline{\Omega}) \ \text{ tal que } \ g_\alpha(x) = D^\alpha f(x) \ \ \forall x \in \Omega \,\} \end{aligned}$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega})$$

$C_0(\Omega) = \{\, f \in C(\Omega) \,/\, supp(f) \text{ es compacto y } supp(f) \subseteq \Omega \,\}$,

donde el conjunto

$$supp(f) = \overline{\{\, x \in \Omega \,/\, f(x) \neq 0 \}}$$

es llamado *soporte* de f.

$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Se observa que $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ y $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

Teorema I.2.15. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Entonces se cumple:

a) $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

b) $L^p(\Omega)$ es separable para todo $1 \leq p < \infty$.

c) $L^p(\Omega)$ es reflexivo para todo $1 < p < \infty$.

d) $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

e) Sea $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que $\int_\Omega fu = 0 \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces $f = 0$ para c.t.p. en Ω.

f) Si $\mu(\Omega) = \int_\Omega 1dx < +\infty$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces $L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es una inmersión continua. Además si $u \in L^\infty(\Omega)$, entonces $\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^\infty}$.

Demostración. Ver Brezis $[5]$, Capítulo IV y Adams $[1]$, Capítulos II y III.

Proposición I.2.16.

i) Si $0 \leq a,\ 0 \leq b$ y $1 \leq p < \infty$, entonces $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

ii) Si $0 \leq a,\ 0 \leq b$ y $p \in]1,+\infty[\,,\ q \in]1,+\infty[$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Ver Brezis $[5]$, página 56 y Adams $[1]$, páginas 23 y 34.

Teorema I.2.17. Sea Ω subconjunto de $\mathbb{R}^N$, abierto, no vacío y acotado. Si existe $\rho > 0$ tal que $\Omega_{-\rho} = \{x \in \mathbb{R}^N \ /\ x \in \Omega \wedge \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \rho\} \neq \emptyset$ ($\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ es la distancia de x al conjunto $\partial\Omega$), $r(\Omega_{-\rho})$ y $r(\Omega)$ son los radios de las bolas cerradas con centro en el origen cuyas medidas de Lebesgue son $\mu_N(\Omega_{-\rho})$ y $\mu_N(\Omega)$ respectivamente. Entonces

$$r(\Omega_{-\rho}) + \rho \leq r(\Omega)\ .$$

Demostración. Ver Bandle $[4]$, página 4.

I.3 ESPACIOS DE SOBOLEV

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto , sea $1 \leq p \leq \infty$ y $m \geq 1$ entero.

Definición I.3.1. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define por :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) \,/\, \forall \alpha \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N \ \ con \ \ |\alpha| \leq m \ \ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$$
$$tal \ \ que \quad \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \big\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y para cada $\alpha \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^N$ se denota $D^\alpha u = g_\alpha$. Cuando $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha_i = (0, \ldots ,1, \ldots ,0)$ para cada $i = 1, \ldots, N$ (la componente $i - ésima$ de α_i es 1 y el resto de componentes es igual a cero) se denota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = D^{\alpha_i} u = g_{\alpha_i} \quad y \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Cuando no haya riesgo de confusión, se escribirá $W^{m,p}$ en lugar de $W^{m,p}(\Omega)$.

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ dotado de la norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ y para todo entero $m \geq 1$.

Cuando $p = 2$ denotamos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert, además la norma asociada a $(u, v)_{H^m}$ es

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{(u, u)_{H^m}} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right]^{1/2}$$

y es equivalente a la norma en $W^{m,2}(\Omega)$.

Definición I.3.2. $H_0^1(\Omega)$ designa la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, es decir

$$H_0^1\,(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\ \|_{H^1(\Omega)}}.$$

De la definición se deduce que $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar de $H^1(\Omega)$.

Teorema I.3.3. Sea m un entero positivo. Entonces se cumple:

a) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

b) $W^{m,p}(\Omega)$ es separable, si $1 \leq p < \infty$.

c) $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo, si $1 < p < \infty$.

d) $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (por tanto reflexivo) y separable.

e) $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (por tanto reflexivo) y separable con el producto escalar de $H^1(\Omega)$.

Demostración. Para a), b) y c) ver los teoremas 3.2 y 3.5 en Adams [1], d) es consecuencia de b) y c). Por último e) es consecuencia de d), de las proposiciones III.17 y III.22 dadas en Brezis [5]. En d) y e) otra forma de probar que los espacios $H^m(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ son reflexivos, es usar la proposición V.1 de [5].

Teorema I.3.4. (Desigualdad de Poincaré). Supongamos que Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Entonces existe una constante C (dependiente de Ω) tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx \,.$$

Este producto escalar induce la norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \nabla u . \nabla u \, dx \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}$$

la cual es equivalente a la norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Ademas $H_0^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ es una inmersión continua.

Demostración. Ver corolario IX.19 en Brezis [5].

ABIERTOS DE CLASE $\boldsymbol{C^m}$

Notación I.3.5. Dado $x \in \mathbb{R}^N$ se escribe

$$x = (x', x_N) \quad \text{con} \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

y se pone

$$|\, x' \,| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} {x_i}^2 \right]^{1/2} .$$

Se denotan

$\mathbb{R}_+^N = \{ \, x = (x', x_N) \, / \, x_N > 0 \, \}$

$Q = \{ \, x = (x', x_N) \, / \, |x'| < 1 \ \ y \ \ |x_N| < 1 \, \}$

$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N = \{ \, x = (x', x_N) \, / \, |x'| < 1 \ \ y \ \ 0 < x_N < 1 \, \}$

$Q_0 = \{ \, x = (x', x_N) \, / \, |x'| < 1 \ \ y \ \ x_N = 0 \, \}$

Definición I.3.6. Sea m un entero positivo. Se dice que un conjunto abierto Ω en $\mathbb{R}^N$ es de clase $\boldsymbol{C^m}$, si para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$ existen un entorno U de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $H: Q \to U$ tal que

$$H \in C^m(\bar{Q}), \ \ H^{-1} \in C^m(\bar{U}), \ \ H(Q_+) = U \cap \Omega \quad \text{y} \quad H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Se dice que Ω es de clase $\boldsymbol{C^\infty}$ si es de clase $\boldsymbol{C^m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

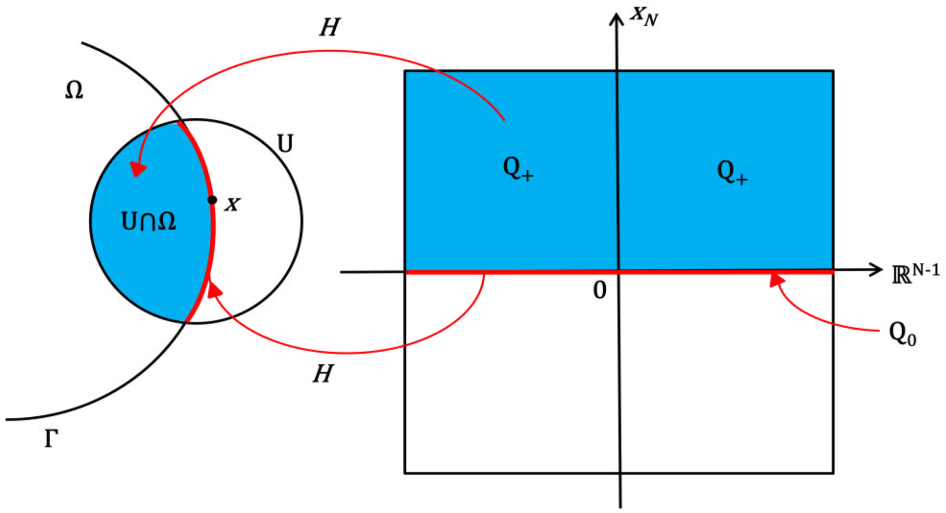

Fig. I.1

INMERSIONES DE SOBOLEV

Teorema I.3.7. Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^1. Entonces las siguientes inmersiones son continuas:

i) Si $N > 2$, $H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$ donde $q = \frac{2N}{N-2}$

ii) Si $N = 2$, $H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$ $\forall\, q \in [2\,,\, +\infty[$

iii) Si $N = 1$, $H^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$

Además, si $N = 1$, se verifica para todo $u \in H^1(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{H^1}|x - y|^{1/2} \quad para\ c.t. \quad x, y \in \Omega,$$

con C dependiente sólo de Ω. En particular

$$H^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega}) \text{ es una inmersión continua,}$$

donde $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\,\in\,\overline{\Omega}} |u(x)| \qquad \forall u \in C(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver corolario IX.14 en Brezis [5] o teorema 2.4.4 en Kesavan [11].

Teorema I.3.8. Supongamos que Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Entonces las siguientes inmersiones son continuas:

i) Si $N > 2$, $H^1_0(\Omega) \to L^q(\Omega)$ $\forall\, q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right]$

ii) Si $N = 2$, $H^1_0(\Omega) \to L^q(\Omega)$ $\forall\, q \in [1, +\infty[$

iii) Si $N = 1$, $H^1_0(\Omega) \to L^q(\Omega)$ $\forall\, q \in [1, +\infty]$.

Además, si $N = 1$, se verifica para todo $u \in H^1_0(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{H^1}|x - y|^{1/2} \quad para\ c.t. \quad x, y \in \Omega,$$

con C dependiente sólo de Ω. En particular

$$H^1_0(\Omega) \to C(\overline{\Omega}) \text{ es una inmersión continua,}$$

donde $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\,\in\,\overline{\Omega}} |u(x)| \qquad \forall u \in C(\overline{\Omega})$.

iv) $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ y $H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

Demostración. Ver nota 21 y corolario IX.14 en Brezis [5].

Teorema I.3.9. Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^1. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

i) Si $N > 2,\ H^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[$

ii) Si $N = 2,\ H^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, +\infty[$

iii) Si $N = 1,\ H^1(\Omega) \overset{c}{\to} C(\overline{\Omega})$,

donde $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega})$.

iv) $H^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^2(\Omega)$.

Demostración. Ver teorema IX.16 en Brezis $[5]$ o teorema 2.5.3 en Kesavan $[11]$.

Teorema I.3.10. Supongamos que Ω es un abierto acotado cualquiera de $\mathbb{R}^N$. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

i) Si $N > 2,\ H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[$

ii) Si $N = 2,\ H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, +\infty[$

iii) Si $N = 1,\ H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} C(\overline{\Omega})$

donde $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega})$.

iv) $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^2(\Omega)$.

Demostración. Ver nota 21 y teorema IX.16 en Brezis $[5]$.

Teorema I.3.11. Si $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto acotado de clase C^1. Entonces las siguientes inmersiones son continuas:

i) Si $N > 2p$, $W^{2,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, \frac{Np}{N-2p}]$

ii) Si $N = 2p$, $W^{2,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, +\infty[$

iii) Si $N < 2p$, $W^{2,p}(\Omega) \to C^k(\overline{\Omega})$ donde

$$k = \begin{cases} 0, & si \ \ p < N < 2p \\ 1, & si \ \ N < p \\ 0, & si \ \ N = p \end{cases}$$

Demostración. Ver corolario IX.15 en Brezis $[5]$ o teorema 2.4.5 Kesavan $[11]$. La demostración es consecuencia del corolario IX.14 dado en $[5]$ o del teorema 2.4.4 dado en $[11]$.

REGULARIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL

Teorema I.3.12. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto conexo) acotado de clase C^2, $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\Omega)$. Si u es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & en\ \Omega, \\ \quad u = 0 & sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

(Es decir $u \in H^1_0(\Omega)$ y $\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f v$ para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$), entonces $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Demostración. Ver teorema 8.2 en Agmon [2]. La prueba es consecuencia del teorema 1.10 en Ambrosetti y Malchiodi [3] o del teorema 9.15 en Gilbarg y Trudinger [9].

I.4 EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

Definición I.4.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el operador de Laplace. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea, si existe una función $w \in H_0^1(\Omega)$, con $w \neq 0$, tal que

$$\int_\Omega \nabla w(x) . \nabla v(x) dx = \lambda \int_\Omega w(x) v(x) dx \quad para\ todo\ v \in H_0^1(\Omega) .$$

Se dice en tal caso que w es una *función propia* asociada al valor propio λ.

Teorema I.4.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío, entonces existe una base ortonormal $\{w_m\}_{m\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ y existe una sucesión $\{\lambda_m\}_{m\geq 1}$ de números reales positivos con $\lambda_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$, tales que

i) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$

ii) $w_m \in H_0^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$

iii) $\int_\Omega \nabla w_m(x) . \nabla v(x)\, dx = \lambda_m \int_\Omega w_m(x) v(x)\, dx$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $m \in \mathbb{N}$.

iv) $-\Delta w_m = \lambda_m w_m$ en Ω y $w_m \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver teorema IX.31 en Brezis [5] o teorema 3.6.1 en Kesavan [11].

Una consecuencia del teorema I.4.2 es que, para cada $m \in \mathbb{N}$, λ_m es el valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea y w_m es la función propia asociada al valor propio λ_m. Además $\lambda_1 > 0$ es el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea.

Teorema I.4.3. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y λ_1 es el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea, entonces

$$0 < \lambda_1 = \min_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \nabla v . \nabla v}{\int_\Omega v^2} = \frac{\int_\Omega \nabla w_1 . \nabla w_1}{\int_\Omega (w_1)^2}.$$

En particular

$$\lambda_1 \left(\int_\Omega v^2 \right) \leq \int_\Omega \nabla v . \nabla v$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\lambda_1 \int_\Omega (w_1)^2 = \int_\Omega \nabla w_1 . \nabla w_1 ,$$

donde w_1 es la función propia asociada al valor propio λ_1.

Demostración. Ver teorema 3.6.2 en Kesavan $[11]$.

Teorema I.4.4. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío, λ_1 es el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea y $u \in (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})$. Entonces $\lambda_1(\int_\Omega u^2) = \int_\Omega \nabla u . \nabla u$ si y sólo si u es una función propia asociada a λ_1.

Demostración. Ver lema 3.6.1 en Kesavan $[11]$.

Teorema I.4.5. Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado no vacío de clase C^2. Si λ es un valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea y w es la función propia asociada al valor propio λ, entonces $w \in C^1(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver observación 1.2.11 en Henrot $[10]$.

Teorema I.4.6. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^1, entonces

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \ / \ u \ es\ una\ función\ de\ Lipschitz\ en\ \Omega\}$$

Demostración. Ver Gilbarg y Trudinger [9], página 154.

Teorema I.4.7. Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado y no vacío de clase C^2. Si λ es un valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea y w es la función propia asociada al valor propio λ entonces w y su extensión continua $\widetilde{w}$ en $\overline{\Omega}$, son funciones de Lipschitz no constantes en Ω y $\overline{\Omega}$ respectivamente. Además $\widetilde{w}$ se anula en $\partial\Omega$.

Demostración. Consecuencia de los teoremas I.4.2, I.4.5 y I.4.6.

Teorema I.4.8. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado no vacío de clase C^2 y λ_1 el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea.

i) Si w es una función propia asociada al valor propio λ_1. Entonces $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ o $w(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$.

ii) $E = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega \nabla u.\nabla v = \lambda_1(\int_\Omega uv) \ \text{ para todo } \ v \in H_0^1(\Omega)\right\}$ es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de $H_0^1(\Omega)$ cuya dimensión es uno.

Demostración. Ver teorema 3.6.3 en Kesavan [11].

Corolario I.4.9. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado no vacío de clase C^2 y λ_1 el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea. Si existe $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ tal que

$$\lambda_1(\int_\Omega w^2) = \int_\Omega \nabla w.\nabla w \, ,$$

entonces

i) w es la función propia asociada al valor propio λ_1.

ii) $w \in C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $-\Delta w = \lambda_1 w$ en Ω.

iii) $w \in C^1(\overline{\Omega})$.

iv) w y su extensión continua $\widetilde{w}$ en $\overline{\Omega}$ son funciones Lipschitz no constantes en Ω

y $\overline{\Omega}$ respectivamente. Además $\widetilde{w}$ se anula en $\partial\Omega$.

v) $w > 0$ en Ω o $w < 0$ en Ω.

Demostración.

i) Es consecuencia del teorema I.4.4.

ii) Es consecuencia de i) y del teorema I.4.2.

iii) Es consecuencia de i) y del teorema I.4.5.

iv) Es consecuencia de i) y del teorema I.4.7.

v) Es consecuencia de i) y del teorema I.4.8.

CAPÍTULO II

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONALES SECUENCIALMENTE SEMICONTINUOS INFERIORMENTE DÉBILMENTE Y LA DERIVADA DE FRÉCHET.

II.1 FUNCIONALES SECUENCIALMENTE SEMICONTINUOS INFERIORMENTE DÉBILMENTE Y OPERADORES LINEALES CONTINUOS Y COMPACTOS.

Sea E un espacio de Banach.

Definición II.1.1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E y $x \in E$. Decimos que $\{x_n\}$ *converge débilmente* a x en E, si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle \qquad \forall f \in E'.$$

En tal caso, denotamos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Decimos que $\{x_n\}$ *converge fuertemente* a x en E, si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = 0 .$$

En tal caso, denotamos

$$x_n \to x.$$

Las partes (ii) y (iii) del siguiente resultado se encuentran en la proposición III.5 de [5].

Proposición II.1.2. Sean E un espacio de Banach, $\{x_n\}$ una sucesión en E, $x \in E$ y $y \in E$. Se verifica :

i) Si $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$, entonces $x = y$.

ii) Si $x_n \to x$, entonces $x_n \rightharpoonup x$.

iii) Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces la sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada y

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Demostración.

i) Como $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$ entonces

$$\langle f, x - y \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in E' .$$

Por la proposición I.1.11

$$\|x - y\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x - y \rangle| = 0 \ .$$

Por lo tanto

$$x = y \ .$$

ii) Resulta de :

$$|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para todo } f \in E'.$$

iii) Dados $\{x_n\}$ una sucesión en E y $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$.

Probaremos que $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

Basta comprobar que para cada $f \in E'$ la sucesión $\{\langle f, x_n \rangle\}$ es acotada.

Para cada $f \in E'$ la sucesión $\{\langle f, x_n \rangle\}$ converge a $\langle f, x \rangle$, luego $\{\langle f, x_n \rangle\}$ es acotada y por el corolario I.1.13 la sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

Se probará que

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \ .$$

Por definición de dual de E se cumple

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \|x_n\| \quad \text{para todo } f \in E' \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite inferior a cada uno de los miembros de la desigualdad anterior, cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \ \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \quad \forall f \in E'$$

Por la proposición I.1.11 y por definición de supremo

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \ . \ \blacksquare$$

Definición II.1.3. La función $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente, (y se escribirá Φ es s.s.c.i.d.) en $x_0 \in E$, si para toda sucesión $\{x_n\}$ en E con $x_n \rightharpoonup x_0$ implica que

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} \Phi(x_n).$$

La función $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (en E), si Φ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente en cada $x \in E$.

En este y los siguientes capítulos se escribirá s.s.c.i.d. en lugar de secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente.

Proposición II.1.4. Sean E un espacio de Banach y $\Phi : E \to \mathbb{R}$ una función s.s.c.i.d. Si $x_0 \in E$ y $\{x_n\}$ es una sucesión en E tal que $x_n \rightharpoonup x_0$, entonces la sucesión $\{\Phi(x_n)\}$ es acotada inferiormente.

Demostración.

Como Φ es s.s.c.i.d., $x_0 \in E$, $x_n \rightharpoonup x_0$ y Φ es una función de E en $\mathbb{R}$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) \in \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) = +\infty\,.$$

Sea

$$l = \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n).$$

Por definición de límite inferior de una sucesión

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} [\, \inf\{\, \Phi(x_m) \,/\, m \geq n, m \in \mathbb{N} \,\}\,]$$

CASO I. Si $l = +\infty$.

Dado $M = 1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que

$$\Phi(x_n) \geq \inf\{\, \Phi(x_m) \,/\, m \geq n, m \in \mathbb{N} \,\} > 1 \qquad \forall n \geq n_0.$$

Por lo tanto

$$\Phi(x_n) \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $K = \min\left\{\, 1, \Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi\left(x_{n_0 - 1}\right) \right\} \in \mathbb{R}$.

CASO II. Si $l \in \mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que

$$l - 1 < \inf\{\, \Phi(x_m) \,/\, m \geq n, m \in \mathbb{N} \,\} \leq \Phi(x_n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Por lo tanto

$$\Phi(x_n) \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $K = \min\left\{\, l - 1, \Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi\left(x_{n_0 - 1}\right) \right\} \in \mathbb{R}$.

En ambos casos se ha probado que la sucesión $\{\Phi(x_n)\}$ es acotada inferiormente. ■

Proposición II.1.5. Sea E un espacio de Banach. Se verifica:

i) Si $\Phi_1 : E \to \mathbb{R}$ y $\Phi_2 : E \to \mathbb{R}$ son funcionales s.s.c.i.d., entonces $\Phi_1 + \Phi_2 : E \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d.

ii) Si $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d., entonces $\lambda\Phi : E \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d. para todo $\lambda > 0$.

Demostración.

i) Sean $x_0 \in E$ y $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que $x_n \rightharpoonup x_0$. Debemos probar que

$$\Phi_1(x_0) + \Phi_2(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} [(\Phi_1 + \Phi_2)(x_n)].$$

Como $\Phi_1 : E \to \mathbb{R}$ y $\Phi_2 : E \to \mathbb{R}$ son funciones s.s.c.i.d., $x_0 \in E$ y $x_n \rightharpoonup x_0$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \liminf_{n\to\infty} \Phi_2(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{y}$$

$$\Phi_1(x_0) + \Phi_2(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) + \liminf_{n\to\infty} \Phi_2(x_n) \qquad (\text{II}.1)$$

Sean $a_n = \inf \{ \Phi_1(x_m) \ / \ m \geq n, m \in \mathbb{N} \} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y

$b_n = \inf \{ \Phi_2(x_m) \ / \ m \geq n, m \in \mathbb{N} \} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$a_n \in \mathbb{R}$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pues, $\{\Phi_1(x_n)\}$ y $\{\Phi_2(x_n)\}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ acotadas inferiormente.

Como los límites inferiores de las sucesiones $\{\Phi_1(x_n)\}$ y $\{ \Phi_2(x_n)\}$ estan en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) + \liminf_{n\to\infty} \Phi_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n).$$

Por definición de ínfimo, se obtiene

$$a_n + b_n \leq \inf \{ \Phi_1(x_m) + \Phi_2(x_m) \ / \ m \geq n, m \in \mathbb{N} \} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite a cada uno de los miembros de la desigualdad anterior, cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) + \liminf_{n\to\infty} \Phi_2(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} [(\Phi_1 + \Phi_2)(x_n)] \qquad (\text{II}.2)$$

De (II.1) y (II.2) se obtiene

$$\Phi_1(x_0) + \Phi_2(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} [(\Phi_1 + \Phi_2)(x_n)] .$$

Con lo cual se prueba que $\Phi_1 + \Phi_2$ es s.s.c.i.d.

ii) Sean $x_0 \in E$, $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que $x_n \rightharpoonup x_0$ y $\lambda > 0$. Debemos probar que

$$\lambda\Phi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} (\lambda\Phi(x_n)).$$

Como Φ es s.s.c.i.d., $x_0 \in E$ y $x_n \rightharpoonup x_0$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$\inf \{\Phi(x_m) \ / \ m \geq n \} \in \mathbb{R} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{y}$$

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} [\inf \{\Phi(x_m) \ / \ m \geq n \}].$$

Multiplicando por $\lambda > 0$ a los miembros de la desigualdad de arriba, se obtiene

$$\lambda\Phi(x_0) \leq \lambda\left[\lim_{n\to\infty}[\,\inf\{\Phi(x_m)\;/\;m \geq n\,\}\,]\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\,\lambda\inf\{\Phi(x_m)\;/\;m \geq n\,\}\,]$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\,\inf\{\lambda\Phi(x_m)\;/\;m \geq n\,\}\,]$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\,(\lambda\Phi(x_n))\,.$$

Con lo cual se prueba que $\lambda\Phi$ es s.s.c.i.d. ■

Definición II.1.6. Sea E un espacio de Banach. La función $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es coerciva, si

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \Phi(x) = +\infty,$$

es decir : para todo $M > 0$, existe $K = K(M) > 0$ tal que

si $x \in E$ y $\|x\| > K$ entonces $\Phi(x) > M$.

Proposición II.1.7. La función $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es coerciva si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = +\infty,$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ en E, tal que $\|x_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.

Demostración.

Supongamos que Φ es coerciva y que $\{x_n\}$ es una sucesión en E tal que $\|x_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Se debe probar que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = +\infty.$$

Dado $M > 0$, como Φ es coerciva, entonces existe $K = K(M) > 0$ tal que

si $x \in E$ y $\|x\| > K$ entonces $\Phi(x) > M$ $\quad$ (II.3)

Como $\|x_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ entonces $\|x_n\| > K$ $\quad$ (II.4)

De (II.3) y (II.4) se tiene que

si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ entonces $\Phi(x_n) > M$.

Esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = +\infty.$$

Ahora, se probará el recíproco por contradicción. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = +\infty$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $\|x_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ y que $\Phi : E \to \mathbb{R}$ no es coerciva.

Como Φ no es coerciva, entonces existe $M > 0$ tal que

para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in E$ con $\|y_n\| > n$ y $\Phi(y_n) \leq M$.

Luego existe una sucesión $\{y_n\}$ en E tal que

$\|y_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ y $\Phi(y_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

es decir la sucesión $\{\Phi(y_n)\}$ es acotada superiormente.

Como $\|y_n\| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = +\infty .$$

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ entonces $\Phi(y_n) > M$.

Luego por las afirmaciones anteriores se tiene

$\Phi(y_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Phi(y_{n_0}) > M$.

Lo cual es una contradicción y esto se debe a que se ha supuesto que Φ no es coerciva. Por lo tanto Φ es coerciva. ■

Teorema II.1.8. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Supongamos que el funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d. y coerciva. Entonces

a) Φ es acotado inferiormente en E, es decir el conjunto $\Phi(E) = \{ \Phi(x) \ / \ x \in E \}$ está acotado inferiormente e $\inf \Phi(E) = \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right)$ para algún $R > 0$.

b) Φ posee por lo menos un mínimo en E, es decir existe $x_0 \in E$ tal que

$\Phi(x_0) \leq \Phi(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración.

a) **Afirmación 1.** El conjunto $\Phi\left(E \setminus \overline{B_R(0)}\right) = \{ \Phi(x) \ / \ x \in E \wedge \|x\| > R \}$ está acotado inferiormente para algún $R > 0$.

Sea $M = \max\{1, \Phi(0)\} > 0$.

Como Φ es coerciva, existe $R > 0$ tal que

si $x \in E$ y $\|x\| > R$ entonces $\Phi(x) > M \geq \Phi(0)$.

Es decir $\Phi(x) \geq \Phi(0)$ para todo $x \in \left(E \setminus \overline{B_R(0)}\right)$.

Afirmación 2. Sea $R > 0$ como en la afirmación 1. El conjunto

$$\Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) = \{ \Phi(x) \ / \ x \in E \wedge \|x\| \leq R \}$$

está acotado inferiormente.

Se probará por contradicción. Supongamos que $\Phi(\ \overline{B_R(0)}\ )$ no está acotado inferiormente, entonces

para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \overline{B_R(0)}$ tal que $\Phi(x_n) < -n$ $\qquad$ (II.5)

Como E es un espacio de Banach reflexivo y $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en E, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y $x_0 \in E$ tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_0.$$

La función Φ es s.s.c.i.d. y $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, entonces

$$\Phi(x_0) \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \Phi(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) \qquad (\text{II}.6)$$

Luego por (II.6),

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

De (II.5) se obtiene que

$$\Phi(x_{n_k}) < -n_k \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

De las dos afirmaciones anteriores se deduce que

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) = -\infty.$$

Luego se tiene que

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad y \quad \liminf_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) = -\infty\ .$$

Lo cual es una contradicción y esto se debe a que se ha supuesto que $\Phi(\ \overline{B_R(0)}\ )$ no está acotado inferiormente. Por lo tanto $\Phi(\ \overline{B_R(0)}\ )$ está acotado inferiormente.

Afirmación 3. El conjunto $\Phi(E)$ está acotado inferiormente.

De las afirmaciones 1 y 2 resulta que el conjunto $\Phi(E)$ es acotado inferiormente.

Afirmación 4. Sea $R > 0$ como en la afirmación 1. Se cumple

$$\inf \Phi(E) = \inf \Phi(\ \overline{B_R(0)}\ )\,.$$

Como $\overline{B_R(0)} \subseteq E$ entonces

$$\inf \Phi(E) \leq \inf \Phi(\ \overline{B_R(0)}\ ) \qquad (\text{II}.7)$$

De la afirmación 1 y de la definición de ínfimo se obtiene

$$\inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) \leq \Phi(0) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in \left(E \setminus \overline{B_R(0)}\right)$$

$$\text{y} \quad \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in \overline{B_R(0)} \ .$$

Luego

$$\inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in E \, .$$

Por la desigualdad anterior y por la definición de ínfimo se tiene

$$\inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) \leq \inf \Phi(E) \tag{II.8}$$

Por lo tanto, de (II.7) y de (II.8)

$$\inf \Phi(E) = \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right).$$

Las afirmaciones anteriores prueban a).

b) De la afirmación 4, $\inf \Phi(E) = \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right)$ para algún $R > 0$.

Sea $d = \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) \in \mathbb{R}$.

Por definición de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \overline{B_R(0)}$ tal que

$$d \leq \Phi(y_n) < d + \frac{1}{n}$$

De la desigualdad anterior se obtiene que

$$d = \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) \, .$$

Como E es un espacio de Banach reflexivo y $\{y_n\}$ es una sucesión acotada en E, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ y $x_0 \in E$ tal que

$$y_{n_k} \rightharpoonup x_0.$$

La función Φ es s.s.c.i.d. y $y_{n_k} \rightharpoonup x_0$, entonces

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} \Phi\left(y_{n_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = d \tag{II.9}$$

Por definición de ínfimo ($d = \inf \Phi\left(\overline{B_R(0)} \right) = \inf \Phi(E)$) se tiene

$$d \leq \Phi(x_0) \tag{II.10}$$

De (II.9) y (II.10) resulta que $d = \Phi(x_0)$, donde $x_0 \in E$.

Como $d = \inf \Phi(E)$, entonces $d = \Phi(x_0) \leq \Phi(x)$ para todo $x \in E$.

Con lo cual termina la prueba del teorema. ■

Proposición II.1.9. Sean E y F espacios de Banach. Si $T : E \to F$ es un operador lineal y continuo, entonces para todo $x \in E$, para toda sucesión $\{x_n\}$ en E con $x_n \rightharpoonup x$ en E, se tiene que $Tx_n \rightharpoonup Tx$ en F.

Demostración.

Sean $x \in E$ y una sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $x_n \rightharpoonup x$ en E. Por demostrar que

$$Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ en } F.$$

El funcional $f \circ T \in E'$ para todo $f \in F'$. Como $x_n \rightharpoonup x$ en E entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, Tx_n \rangle_{F'\times F} = \lim_{n\to\infty} \langle f \circ T, x_n \rangle_{E'\times E} = \langle f \circ T, x \rangle_{E'\times E} = \langle f, Tx \rangle_{F'\times F},$$

para todo $f \in F'$.

Por lo tanto

$$Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ en } F. \quad \blacksquare$$

Teorema II.1.10. Sean E y F espacios de Banach. Si $T : E \to F$ es un operador lineal y compacto, entonces para todo $x \in E$, para toda sucesión $\{x_n\}$ en E con $x_n \rightharpoonup x$ en E, se tiene que $Tx_n \to Tx$ en F.

Demostración.

Afirmación 1. Para todo $x \in E$, para toda sucesión $\{x_n\}$ en E, $x_n \rightharpoonup x$ en E implica que existe una subsucesión $\{Tx_{n_k}\}$ de $\{Tx_n\}$ tal que $Tx_{n_k} \to Tx$ en F.

Sean $x \in E$ y $\{x_n\}$ sucesión en E tal que $x_n \rightharpoonup x$ en E. Como $x_n \rightharpoonup x$ en E y E es un espacio de Banach, por la proposición II.1.2 $\{x_n\}$ es acotada en E.

Desde que T es un operador compacto y $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en E, existe una subsucesión $\{Tx_{n_k}\}$ de $\{Tx_n\}$ y $y \in F$ tal que $Tx_{n_k} \to y$ en F.

Por la proposición II.1.2

$$Tx_{n_k} \rightharpoonup y \text{ en } F.$$

Como $T : E \to F$ es un operador lineal compacto entonces $T : E \to F$ es lineal y continuo. Luego por la proposición anterior

$$Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ en } F.$$

La sucesión $\{Tx_{n_k}\}$ converge débilmente a Tx en F, pues $Tx_n \rightharpoonup Tx$ en F y $\{Tx_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{Tx_n\}$.

Luego tenemos $Tx_{n_k} \rightharpoonup y$ en F y $Tx_{n_k} \rightharpoonup Tx$ en F.

Por la unicidad de la convergencia débil (proposición II.1.2) $y = Tx$.

Se ha probado que existe una subsucesión $\{Tx_{n_k}\}$ de $\{Tx_n\}$ tal que

$$Tx_{n_k} \to Tx \quad \text{en} \quad F.$$

Afirmación 2 . Para todo $x \in E$ y para toda sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $x_n \rightharpoonup x$ en E se tiene que $Tx_n \to Tx$ en F.

Se probará por contradicción, supongamos lo contrario, es decir que existe $x \in E$ y existe una sucesión $\{x_n\}$ en E tal que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{en} \quad E \quad \text{y} \quad \{Tx_n\} \text{ no converge en norma a } Tx.$$

Como la sucesión $\{Tx_n\}$ no converge en norma a Tx, entonces existe $\varepsilon_1 > 0$ y existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \varepsilon_1 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge débilmente a x en E, pues $x_n \rightharpoonup x$ en E y $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$. Por la **afirmación 1** existe una subsucesión $\{T(b_p)\}$ de $\{Tx_{n_k}\}$ tal que

$$T(b_p) \to Tx \quad \text{en} \quad F.$$

Como $\{T(b_p)\}$ es una subsucesión de $\{Tx_{n_k}\}$ entonces

$$\|T(b_p) - Tx\| \geq \varepsilon_1 \quad \text{para todo} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Lo cual contradice $T(b_p) \to Tx$ en F.

Por lo tanto es cierta la **afirmación 2**, con lo cual se prueba este teorema. ■

II.2 DERIVADA DE FRÉCHET

Definición II.2.1. Sean E y W dos espacios de Banach y A un subconjunto abierto no vacío de E. Decimos que la aplicación $F : A \to W$ es *Fréchet diferenciable* (o *diferenciable*) en $u \in A$, si existe un operador lineal y continuo en E denotado por $F'(u) : E \to W$ y una aplicación $r(u,\ ) : B_\varepsilon(0) \subseteq E \to W$ tales que

$$F(u+v) = F(u) + F'(u)[v] + r(u,v) \quad \text{para todo} \quad v \in B_\varepsilon(0)$$

donde

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|r(u,v)\|}{\|v\|} = 0.$$

El operador $F'(u)$ se llama *derivada de Fréchet* (ó *derivada*) de la aplicación F en u. $F'(u)[v]$ denota el valor de la aplicación $F'(u)$ en el elemento $v \in E$.
Decimos que F es *Fréchet diferenciable* (o *diferenciable*) en A, si F es *Fréchet diferenciable* en cada $u \in A$.

Proposición II.2.2. Sean E y W dos espacios de Banach y A un subconjunto abierto no vacío de E. La aplicación $F : A \to W$ es Fréchet diferenciable en $u \in A$ si y solo si existe un operador lineal y continuo en E denotado por $F'(u) : E \to W$ tal que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - F'(u)[v]\|}{\|v\|} = 0$$

Demostración.
Basta tomar $r(u,v) = F(u,v) - F(u) - F'(u)[v]$ para todo $v \in B_\varepsilon(0)$, en la definición anterior. ■

La equivalencia anterior permite tomar la proposición II.2.2 como definición de diferenciabilidad según Fréchet.

Proposición II.2.3. Sean E y W dos espacios de Banach y A un subconjunto abierto no vacio de E. Si la aplicación $F : A \to W$ es Fréchet diferenciable en $u \in A$, entonces la derivada de Fréchet en este punto es única.

Demostración.
Supongamos que existen dos operadores lineales y continuos $M, N : E \to W$ y dos aplicaciones $r(u,\ ) : B_{t_1}(0) \subseteq E \to W$ y $s(u,\ ) : B_{t_2}(0) \subseteq E \to W$ tales que

$$F(u+v) = F(u) + M(v) + r(u,v), \quad \text{para todo} \quad v \in B_{t_1}(0)$$
$$F(u+v) = F(u) + N(v) + s(u,v), \quad \text{para todo} \quad v \in B_{t_2}(0)$$

donde

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|r(u,v)\|}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|s(u,v)\|}{\|v\|} = 0 \qquad \text{(II.11)}$$

Sea $t = \min\{t_1, t_2\} > 0$.
Las afirmaciones anteriores implican

$$M(v) - N(v) = s(u,v) - r(u,v) \quad \text{para todo} \quad v \in B_t(0),$$

y

$$0 \leq \frac{\|M(v) - N(v)\|}{\|v\|} \leq \frac{\|s(u,v)\|}{\|v\|} + \frac{\|r(u,v)\|}{\|v\|}$$

para todo $v \in (B_t(0) \setminus \{0\})$.

De (II.11) y de la desigualdad anterior se deduce

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|M(v) - N(v)\|}{\|v\|} = 0\,.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad v \in E \quad \text{y} \quad 0 < \|v\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{\|M(v)-N(v)\|}{\|v\|} < \varepsilon \qquad \text{(II.12)}$$

Sean $w \in E$ con $\|w\| = 1$ y $v = \left(\frac{\delta}{2}\right)w$ $\left(\|v\| = \frac{\delta}{2}\right)$.

De la relación (II.12) se deduce

$$\|M(w) - N(w)\| < \varepsilon\,.$$

En consecuencia

$$\|M(w) - N(w)\| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad w \in E \quad \text{con} \quad \|w\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0.$$

La afirmación anterior implica

$$M(w) = N(w) \quad \text{para todo} \quad w \in E \quad \text{con} \quad \|w\| = 1.$$

Y como M y N son operadores lineales se concluye que

$$M(v) = N(v) \qquad \forall\, v \in E.$$

Esto prueba que la derivada de Fréchet de F en el punto u es única. ■

Proposición II.2.4. Sean E y W espacios de Banach y A un subconjunto abierto no vacío de E. Se cumple:

i) Si la aplicación $F : A \to W$ es Fréchet diferenciable en $u \in A$, entonces F es continua en u.

ii) Si la aplicación $F : A \to W$ es Fréchet diferenciable en $u \in A$, entonces

$$F'(u)[v] = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} \qquad \forall v \in E.$$

Es decir, para todo $v \in E$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, v) > 0$ tal que

$$\text{si} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad 0 < |t| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left\| \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} - F'(u)[v] \right\| < \varepsilon\,.$$

Demostración.

i) Por demostrar $\lim_{\|v\|\to 0}\|F(u+v)-F(u)\| = 0.$

Siendo F una aplicación Fréchet diferenciable en $u \in A,$ tenemos

$$0 \leq \|F(u+v)-F(u)\| \leq \|F'(u)[v]\| + \|r(u,v)\| \quad \forall\, v \in B_{\varepsilon}(0) \qquad (\text{II}.13)$$

con

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|r\,(u,v)\|}{\|v\|} = 0$$

La igualdad anterior implica que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\|r\,(u,v)\| = 0$$

Como $F'(u)$ es un operador lineal continuo en E, entonces

$$\lim_{\|v\|\to 0}\|F'(u)[v]\| = 0$$

De la relación (II.13) y de los dos límites anteriores se obtiene

$$\lim_{\|v\|\to 0}\|F(u+v)-F(u)\| = 0\,.$$

Esto prueba la continuidad de F en u.

ii) Sea v un elemento fijo de E.

CASO I. Si $v = 0$. Se cumple

$$\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} - F'(u)[v] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0,$ existe $\delta = 1 > 0$ tal que

si $t \in \mathbb{R}$ y $0 < |t| < \delta$ entonces $\left\|\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} - F'(u)[v]\right\| < \varepsilon\,.$

CASO II. Si $v \neq 0$. Como F es Fréchet diferenciable en $u \in A,$ entonces existe un operador lineal y continuo $F'(u)\colon E \to W$ (derivada de Fréchet de F en u) y una aplicación $r(u,\ )\colon B_{\delta_1}(0) \subseteq E \to W$ tales que

$$F(u+w) = F(u) + F'(u)[w] + r(u,w) \quad \text{para todo} \quad w \in B_{\delta_1}(0) \quad \text{y}$$

$$\lim_{\|w\|\to 0}\frac{\|r(u,w)\|}{\|w\|} = 0.$$

Estas dos igualdades implican

$$\left\|\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} - F'(u)[v]\right\| = \frac{\|r(u,tv)\|}{|t|} \qquad (\text{II}.14)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \frac{\delta_1}{\|v\|}$ y

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|r(u,tv)\|}{\|tv\|}=0\,.$$

Luego del límite anterior y de

$$\frac{\|r(u,tv)\|}{|t|}=\frac{\|r(u,tv)\|\;\|v\|}{\|tv\|}$$

para todo $t\in\mathbb{R}$ tal que $0<|t|<\frac{\delta_1}{\|v\|}$ se obtiene

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|r(u,tv)\|}{|t|}=0\,. \qquad (\mathrm{II}.15)$$

Dado $\varepsilon>0$, de (II.15) existe $\delta_2=\delta_2(\varepsilon,v)>0$ tal que

si $t\in\mathbb{R}$ y $0<|t|<\delta_2$ entonces $\frac{\|r(u,tv)\|}{|t|}<\varepsilon$ $\qquad (\mathrm{II}.16)$

Sea $\delta=\min\left\{\frac{\delta_1}{\|v\|},\delta_2\right\}>0$. De (II.14) y (II.16) se obtiene,

si $t\in\mathbb{R}$ y $0<|t|<\delta$ entonces $\left\|\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}-F'(u)[v]\right\|<\varepsilon$,

lo cual termina la prueba de la proposición. ■

Proposición II.2.5. Sean E y W espacios de Banach y A un subconjunto abierto no vacío de E. Supongamos que las aplicaciones $F_1:A\to W$ y $F_2:A\to W$ son Fréchet diferenciables en $u\in A$. Entonces

i) La aplicación $F_1+F_2:A\to W$ definida por $(F_1+F_2)(v)=F_1(v)+F_2(v)$ $\forall\, v\in A$, es Fréchet diferenciable en $u\in A$ y $(F_1+F_2)'(u)=F_1'(u)+F_2'(u)$.

ii) Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$, la aplicación $\alpha F_1:A\to W$ definida por $(\alpha F_1)(v)=\alpha\big(F_1(v)\big)$ para todo $v\in A$, es Fréchet diferenciable en $u\in A$ y $(\alpha F_1)'(u)=\alpha\big(F_1{}'(u)\big)$.

Demostración. La linealidad de la derivada de Fréchet es consecuencia directa de la definición de diferenciabilidad de Fréchet . ■

Proposición II.2.6. Sean E y W espacios de Banach. Se cumple:

i) Si $T:E\to W$ es una aplicación constante (es decir existe $y_0\in W$ tal que $T(u)=y_0$ para todo $u\in E$), entonces $T'(u)[v]=0$ para todo $u\in E$ y para todo $v\in E$.

ii) Si $T : E \to W$ es un operador lineal y continuo en E, entonces T es Fréchet diferenciable para cada $u \in E$ y $T'(u)[v] = T(v)$ para todo $u \in E$ y para todo $v \in E$.

Demostración.

i) Es cierto pues, $T(u+v) - T(u) - 0 = 0$ para todo $u \in E$ y para todo $v \in E$.

ii) Es cierto pues, $T(u+v) - T(u) - T(v) = 0$ para todo $u \in E$, para todo $v \in E$ y T es un operador lineal y continuo en E. ■

Proposición II.2.7. Sean H un espacio de Hilbert, $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ es su producto interno y $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ la norma inducida por dicho producto interno. Entonces la aplicación $F : H \to \mathbb{R}$ definida por $F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ para todo $u \in H$, es Fréchet diferenciable para cada $u \in H$ y $F'(u)[v] = (u,v)$ para todo $u \in H$ y para todo $v \in H$.

Demostración.

Sea u un elemento fijo de H.

La aplicación $(u,\ ) : H \to \mathbb{R}$ es un operador lineal y continuo en H, pues $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ es un producto interno en H.

Para todo $v \in H$, se puede probar que

$$F(u+v) - F(u) - (u,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 .$$

Entonces

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{|F(u+v) - F(u) - (u,v)|}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0 .$$

Por lo tanto, por la proposición II.2.2, F es Fréchet diferenciable en u y $F'(u)[v] = (u,v)$ para todo $v \in H$. De aquí F es Fréchet diferenciable para cada $u \in H$ y $F'(u)[v] = (u,v)$ para todo $u \in H$ y para todo $v \in H$. ■

Proposición II.2.8. Sea E un espacio de Banach.

Si $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en E y u_0 es un punto mínimo de Φ en E (es decir $u_0 \in E$ es tal que $\Phi(u_0) \leq \Phi(u)$ para todo $u \in E$), entonces $\Phi'(u_0) = 0.$

Demostración.

Como Φ es Fréchet diferenciable en u_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(u_0 + w) = \Phi(u_0) + \Phi'(u_0)[w] + r(u_0, w) \text{ para todo } w \in B_\delta(0) \qquad (\text{II.17})$$

Además

$$\lim_{||w|| \to 0} \frac{|r(u_0, w)|}{||w||} = 0.$$

Sea v un elemento de E tal que $||v|| = \delta > 0$. De (II.17) se deduce:

$$\Phi(u_0 + tv) = \Phi(u_0) + t\,\Phi'(u_0)[v] + r(u_0, tv) \text{ para todo } t \in]-1,1[\qquad (\text{II.18})$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{|r(u_0, tv)|}{|t|} = 0\,.$$

De la relación (II.18) y usando el hecho que u_0 es un punto mínimo de Φ en E, se deduce que

$$0 \leq \Phi'(u_0)[v] + \frac{r(u_0, tv)}{t} \qquad (\text{II}.19)$$

para todo $t \in]0,1[$ y

$$0 \geq \Phi'(u_0)[v] + \frac{r(u_0, tv)}{t} \qquad (\text{II}.20)$$

para todo $t \in]-1,0[$.

Tomando límite a ambos miembros de la desigualdad (II.19) cuando $t \to 0^+$ y tomando límite a ambos miembros de la desigualdad (II.20) cuando $t \to 0^-$, se obtiene

$$\Phi'(u_0)[v] = 0.$$

Luego

$$\Phi'(u_0)[v] = 0 \text{ para todo } v \in E \text{ tal que } ||v|| = \delta > 0 \qquad (\text{II.21})$$

Como $\Phi'(u_0)$ es un operador lineal que satisface (II.21), entonces

$$\Phi'(u_0)[w] = 0 \text{ para todo } w \in E. \ \blacksquare$$

Corolario II.2.9. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Si Φ es un funcional s.s.c.i.d., coerciva y Fréchet diferenciable en E, entonces existe $u_0 \in E$ tal que $\Phi'(u_0) = 0$.

Demostración.

Consecuencia del teorema II.1.8 y la proposición II.2.8. ■

CAPÍTULO III

FUNCIÓN DE NEMYTSKII

III.1 FUNCIÓN DE NEMYTSKII

Definición III.1.1. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada *función de Carathéodory* si :

a) para cada $s \in \mathbb{R}$ fijo la función $x \mapsto f(x,s)$ es medible según Lebesgue en Ω;

b) para casi todo $x \in \Omega$ fijo la función $s \mapsto f(x,s)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las funciones medibles Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$. En adelante el término medible se referirá siempre a la medida de Lebesgue.

Lema III.1.2. Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función de Carathédory*, entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\big(x, u(x)\big)$ $\forall\, x \in \Omega$, es medible en Ω para cada función simple medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Demostración.

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función simple medible, entonces el rango de la función u es un conjunto finito de números reales.

Sean $Ran(u) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m\}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ son los distintos valores del $Ran(u)$) y $\Omega_i = \{x \in \Omega \,/\, u(x) = \alpha_i\}$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Se cumple:

$a)$ $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_m$ son conjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$,

$$b)\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i\ ,\quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{y}$$

$$c)\ u(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \chi_{\Omega_i}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

De b) y c) se deduce que:

$$f\big(x, u(x)\big) = \sum_{i=1}^{m} f(x, \alpha_i)\, \chi_{\Omega_i}(x), \quad \forall x \in \Omega\,.$$

Desde que $f(x,\alpha_i)$ es medible y Ω_i es un conjunto medible para cada $i = 1, \dots, m$, la función $g(x) = f(x, u(x))$ es medible. ■

El siguiente resultado se encuentra en $[7]$, ver teorema 2.1.

Teorema III.1.3. Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory, entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\big(x, u(x)\big)$ $\forall\, x \in \Omega$, es medible para todo $u \in \mathcal{M}$.

Demostración.

Sea $u \in \mathcal{M}$, entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $\{u_n\}$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Por el lema anterior la función $x \mapsto f(x, u_n(x))$ es medible, para cada $n \in \mathbb{N}$.

La definición (III.1.1. (b)) implica que

$$\lim_{n\to\infty} f(x, u_n\,(x)) = f(x, u(x)) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

De las dos afirmaciones anteriores se deduce que la función g es medible en Ω. ■

Definición III.1.4. Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Se define la función $N_f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, por $\big(N_f u\big)(x) = f\big(x, u(x)\big)$ para todo $u \in \mathcal{M}$ y para todo $x \in \Omega$. La función N_f es llamada **función de Nemytskii.**

El siguiente resultado se encuentra en $[7]$, ver teorema 2.3.

Teorema III.1.5. Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Supongamos que existe una constante $A > 0$, una función $B \in L^q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$ y $r > 0$ con $qr \ge 1$ tal que

$$|f(x,s)| \le A|s|^r + B(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega,\ \ \forall\, s \in \mathbb{R} \tag{III.1}$$

Entonces

a) N_f es una función de $L^{qr}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$, es decir $N_f u \in L^q(\Omega)$, si $u \in L^{qr}(\Omega)$ y

$$\left\|N_f u\right\|_{L^q} \le A\|u\|_{L^{qr}}^r + \|B\|_{L^q} \quad \forall u \in L^{qr}(\Omega) \tag{III.2}$$

b) N_f es continua y acotada (es decir, $N_f(D)$ es un conjunto acotado en $L^q(\Omega)$, si D es un conjunto acotado en $L^{qr}(\Omega)$).

Demostración.

a) Debemos mostrar que N_f es una función de $L^{qr}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$.

Sea $u \in L^{qr}(\Omega)$, por (III.1) y la desigualdad dada en la proposición I.2.16 se obtiene:

$$|f(x,u(x))|^q \le (A|u(x)|^r + |B(x)|)^q \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$
$$\le 2^{q-1}(A^q|u(x)|^{qr} + |B(x)|^q) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Y como $u \in L^{qr}(\Omega)$ y $B \in L^q(\Omega)$ entonces $N_f u \in L^q(\Omega)$.

Ahora vamos a probar (III.2). Sea $u \in L^{qr}(\Omega)$, gracias a (III.1) y a la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\left\|N_f u\right\|_{L^q} \le \|A|u(x)|^r + B(x)\|_{L^q}$$
$$\le A\|u\|_{L^{qr}}^r + \|B\|_{L^q}.$$

b) Gracias a (III.2), N_f es acotada. Ahora probaremos que N_f es continua, es decir, dados $u \in L^{qr}(\Omega)$ y $\{u_n\}$ una sucesión en $L^{qr}(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ en $L^{qr}(\Omega)$ se debe probar que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ en $L^q(\Omega)$.

Sea $u \in L^{qr}(\Omega)$. Supongamos que $\{u_n\}$ es una sucesión en $L^{qr}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^{qr}(\Omega)$, entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ y $h \in L^{qr}(\Omega)$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = u(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega \tag{III.3}$$

$$\text{y} \quad \left|u_{n_k}(x)\right| \le h(x) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ y } c.t.\ \ x \in \Omega \tag{III.4}$$

Ahora aplicaremos el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para mostrar que $N_f(u_{n_k}) \to N_f(u)$ en $L^q(\Omega)$.

Notemos que, gracias a la parte (a) de este teorema se tiene

$$\left|N_f(u_{n_k}) - N_f(u)\right|^q \in L^1(\Omega),\ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además,

$$\lim_{k\to\infty}\left|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\right|^q = 0 \quad c.t.\ \ x \in \Omega\,,$$

debido a que f es una función de Carathéodory y a la relación (III.3).

Ahora probaremos que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\right|^q \le g(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, utilizando (III.1) y (III.4) se obtiene

$$\begin{aligned}\left|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\right|^q &\leq \left(\left|N_f u_{n_k}(x)\right| + \left|N_f u(x)\right|\right)^q \qquad \forall\, x \in \Omega.\\ &\leq \left(A\left(\left|u_{n_k}(x)\right|^r + |u(x)|^r\right) + 2|B(x)|\right)^q \ \ c.t.\ \ x \in \Omega\\ &\leq (2A|h(x)|^r + 2|B(x)|)^q \quad c.t.\ \ x \in \Omega\\ &\leq 2^{2q-1}(A^q|h(x)|^{rq} + |B(x)|^q) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.\end{aligned}$$

Sea $g(x) = 2^{2q-1}(A^q|h(x)|^{rq} + |B(x)|^q)\ \ \forall\, x \in \Omega$,

La función $g \in L^1(\Omega)$ pues $h \in L^{qr}(\Omega)$ y $B \in L^q(\Omega)$.

Por lo tanto, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\right|^q \leq g(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Luego por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty}\left\|N_f u_{n_k} - N_f u\right\|_{L^q} = 0.$$

Y por un resultado estándar de espacios métricos obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|N_f u_n - N_f u\right\|_{L^q} = 0.$$

Por lo tanto N_f es continua en u, lo que prueba que N_f es continua. ■

Corolario III.1.6. Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Supongamos que existe una constante $A > 0$ y una función $B \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ tal que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \quad c.t.\ \ x \in \Omega \ \text{ y } \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces $N_f: L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ es continuo y acotado. Además

$$\left\|N_f u\right\|_{L^q} \leq A\|u\|_{L^q} + \|B\|_{L^q} \quad \forall u \in L^q(\Omega).$$

Demostración. Consecuencia del teorema III.1.5. ■

III.2 LA DERIVADA DE FRÉCHET DEL FUNCIONAL Φ

Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $N \geq 1$. En esta sección daremos dos condiciones, una sobre el número p y otra sobre la función de Carathéodory f, el motivo es garantizar que el funcional que denotaremos por Φ y que se definirá en las siguientes líneas, es Fréchet diferenciable.

El número p satisface la siguiente condición:

$$p > \frac{2N}{N+2} \quad si \;\; N \geq 2 \quad , \quad p > 1 \quad si \;\; N = 1 \qquad \text{(III.5)}$$

Y la función de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la siguiente condición: existe una constante $A > 0$ y una función $B \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \qquad \text{(III.6)}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Al final de la sección se probará que, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, p satisface la condición (III.5), la función de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la condición (III.6) y $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \quad \text{para casi todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R},$$

entonces para todo $h \in L^p(\Omega)$, el funcional $\Phi: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u(x).\nabla u(x)\,dx - \int_\Omega F(x,u(x))\,dx - \int_\Omega h(x)\,u(x)\,dx\,,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema III.2.1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Supongamos que p satisface la condición (III.5) y $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (III.6). Se cumple:

a) Si $1 < p \leq 2$, entonces la función $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continua y acotada.

b) Si $2 < p$, entonces la función $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es continua y acotada.

Demostración.

Desde que Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y p satisface la condición (III.5) se tiene que

$$H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua} \qquad \text{(III.7)}$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

Además,

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua} \qquad \text{(III.8)}$$

a) Supongamos que $1 < p \leq 2$, entonces $p \leq 2 \leq p'$.
   Como $p \leq p'$ y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ entonces

$$L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua} \qquad \text{(III.9)}$$

   De la hipótesis, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (III.6), entonces por el corolario III.1.6

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega) \quad \text{es continua y acotada} \qquad \text{(III.10)}$$

   De las relaciones (III.7), (III.9) y (III.10) se deduce que $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es una función continua y acotada.

b) Supongamos que $2 < p$.
   Como $2 < p$ y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ entonces

$$L^p(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua} \qquad \text{(III.11)}$$

   Sabemos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (III.6) y $L^p(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, entonces existe una constante $A > 0$ y una función $B \in L^p(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ tal que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x)$$

   para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.
   Luego por el corolario III.1.6

$$N_f : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad \text{es continua y acotada} \qquad \text{(III.12)}$$

   De las relaciones (III.8) y (III.12) se deduce que $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es continua y acotada. ■

Lema III.2.2. Sean $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory y la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) La función F es de Carathéodory, además para casi todo $x \in \Omega$ fijo, la función $s \mapsto F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ y $\frac{dF}{ds}(x,s) = f(x,s) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$.

b) La función $N_F u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por $(N_F u)(x) = F(x, u(x)) \quad \forall\, x \in \Omega$ es medible Lebesgue, para cada función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Demostración.

a)

a₁) Dado $s \in \mathbb{R}$ fijo, mostraremos que la función $x \mapsto F(x,s)$ es medible Lebesgue en Ω.

Caso I. Si $s > 0$.

Desde que la función $t \mapsto f(x,t)$ es continua en $\mathbb{R}$, para $c.t.\ x \in \Omega$ fijo, tenemos:

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad c.t.\ x \in \Omega, \qquad \text{(III.13)}$$

donde:

$$s_n(x) = \frac{s}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(x, \frac{(i-1)s}{n}\right) \quad para\ todo \quad x \in \Omega \qquad \text{(III.14)}$$

Como f es de Carathéodory, la función $x \mapsto f\left(x, \frac{is}{n}\right)$ es medible en Ω, para cada i y s fijo, entonces por la fórmula (III.14) la función $x \mapsto s_n(x)$ es medible en Ω para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo. Por lo tanto, por la fórmula (III.13) la función $x \mapsto F(x,s)$ es medible en Ω, para cada $s > 0$ fijo.

Caso II. $s < 0$, análogo al caso anterior.

Caso III. $s = 0$. Es cierto pues $F(x,0) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

a₂) Para $c.t.\ x \in \Omega$ fijo debemos mostrar que la función $s \mapsto F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ y $\frac{dF}{ds}(x,s) = f(x,s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Esto es consecuencia del teorema Fundamental del Cálculo y de que la función $s \mapsto f(x,s)$ es continua en $\mathbb{R}$ para casi todo $x \in \Omega$.

En **a₁)** y **a₂)** se prueba la parte **a)** de este lema.

b) Es consecuencia del teorema III.1.3 y la parte (a) de este lema. ■

Teorema III.2.3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Supongamos que p satisface la condición (III.5), $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (III.6) y $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ para $c.t.$ $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces la función $N_F|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ es continua y acotada. Además

$$\|N_F u\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{A}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|u\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}}{p'} + \frac{\|B\|_{L^p(\Omega)}^p}{p} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad (\mathrm{III.15})$$

Donde p' es el exponente conjugado de p, la constante A y la función B son como en la condición (III.6).

Demostración.

Afirmación 1.

$$|F(x,s)| \leq \frac{A}{2}|s|^2 + \frac{|s|^{p'}}{p'} + \frac{|B(x)|^p}{p} \quad c.t.\ x \in \Omega \text{ y } \forall s \in \mathbb{R}, \qquad (\mathrm{III.16})$$

donde p' es el exponente conjugado de p, la constante A y la función B son como en la condición (III.6).

Caso I. Si $s > 0$.

Utilizando la condición (III.6) y luego aplicando la proposición I.2.16, se obtiene

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| &\leq \int_0^s |f(x,t)|dt \quad c.t.\ x \in \Omega \\
&\leq \int_0^s [A|t| + |B(x)|]dt \quad c.t.\ x \in \Omega \\
&= \frac{A}{2}s^2 + |B(x)|s \quad c.t.\ x \in \Omega \\
&\leq \frac{A}{2}|s|^2 + \frac{|s|^{p'}}{p'} + \frac{|B(x)|^p}{p} \quad c.t.\ x \in \Omega
\end{aligned}$$

Caso II. Si $s < 0.$

$$F(x,s) = -\int_s^0 f(x,t)dt \qquad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Utilizando la condición (III.6) y luego aplicando la proposición I.2.16, se obtiene

$$\begin{aligned}|F(x,s)| &= \left|\int_s^0 f(x,t)dt\right| \qquad c.t.\ \ x \in \Omega.\\ &\leq \int_s^0 |f(x,t)|dt \qquad c.t.\ \ x \in \Omega.\\ &\leq \int_s^0 (A|t| + |B(x)|)dt \qquad c.t.\ \ x \in \Omega\\ &= \frac{A}{2}s^2 + |B(x)|(-s) \qquad c.t.\ \ x \in \Omega\\ &\leq \frac{A}{2}|s|^2 + \frac{|s|^{p'}}{p'} + \frac{|B(x)|^p}{p} \qquad c.t.\ \ x \in \Omega\end{aligned}$$

Caso III. Si $s = 0$. La desigualdad (III.16) es cierta, pues $F(x,s) = 0 \ \ c.t.\ \ x \in \Omega.$
De los tres casos, se cumple la afirmación 1.

Afirmación 2 . $N_F u \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega).$
Desde que Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y p satisface la condición (III.5) se tiene

$$H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \ \ \text{es una inmersión continua} \qquad (\mathrm{III}.17)$$

Donde p' es el exponente conjugado de p .
Además

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \ \ \text{es una inmersión continua} \qquad (\mathrm{III}.18)$$

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$.
De (III.17) y (III.18)

$$u \in L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega)\ .$$

De (III.16) se obtiene

$$|F(x,u(x))| \leq \frac{A}{2}|u(x)|^2 + \frac{|u(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|B(x)|^p}{p} \qquad c.t.\ \ x \in \Omega.$$

Y como $u \in L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ y $B \in L^p(\Omega)$ entonces $N_F u \in L^1(\Omega).$

Afirmación 3. La desigualdad dada en (III.15) se cumple para todo $u \in H_0^1(\Omega).$
Esta afirmación es consecuencia de (III.17), de (III.18) y de la desigualdad (III.16).

Afirmación 4. $N_F|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ es acotada.

Sea D un conjunto acotado en $H_0^1(\Omega)$, entonces por la relación (III.17) y (III.18) D es acotado en $L^2(\Omega)$ y en $L^{p'}(\Omega)$. Luego por la desigualdad (III.15) el conjunto $N_F(D)$ es un conjunto acotado en $L^1(\Omega)$.

Afirmación 5. $N_F|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ es continua, es decir, dados $u \in H_0^1(\Omega)$ y una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$ se debe probar que $N_F u_n \to N_F u$ en $L^1(\Omega)$.

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Supongamos que $\{u_n\}$ es una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, por (III.17) y (III.18)

$$u_n \to u \text{ en } L^{p'}(\Omega) \text{ y } u_n \to u \text{ en } L^2(\Omega).$$

Luego existen una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$, $h \in L^{p'}(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$ tales que:

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = u(x) \quad c.t. \ \ x \in \Omega \tag{III.19}$$

$$|u_{n_k}(x)| \le h(x) \quad \forall k \ \ y \ \ c.t. \ \ x \in \Omega \tag{III.20}$$

$$|u_{n_k}(x)| \le g(x) \quad \forall k \ \ y \ \ c.t. \ \ x \in \Omega \tag{III.21}$$

Ahora utilizaremos el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para demostrar que:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| N_F(u_{n_k}) - N_F(u) \right\|_{L^1} = 0.$$

Veamos:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $g_k(x) = F\left(x, u_{n_k}(x)\right) \quad c.t. \ \ x \in \Omega$

- $g_k \in L^1(\Omega) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, lo cual es cierto por la afirmación 2.
- $g_k(x) \to F(x, u(x))$ cuando $k \to \infty$ $c.t.$ $x \in \Omega$, pues F es una función de Carathéodory y $u_{n_k}(x) \to u(x)$ cuando $k \to \infty$ $c.t.$ $x \in \Omega$ (ver (III.19)).
- Existe una función $m \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$,

  $$|g_k(x)| \le m(x) \quad c.t. \ \ x \in \Omega.$$

  Dado $k \in \mathbb{N}$, utilizando las desigualdades (III.16), (III.20) y (III.21) se obtiene

  $|g_k(x)| = |F(x, u_{n_k}(x)| \ \ \forall\, x \in \Omega$

$$\leq \frac{A}{2}\left|u_{n_k}(x)\right|^2+\frac{\left|u_{n_k}(x)\right|^{p'}}{p'}+\frac{|B(x)|^p}{p} \qquad c.t.\ \ x\in\Omega$$

$$\leq \frac{A}{2}|g(x)|^2+\frac{|h(x)|^{p'}}{p'}+\frac{|B(x)|^p}{p} \qquad c.t.\ \ x\in\ \Omega$$

Sea

$$m(x)=\frac{A}{2}|g(x)|^2+\frac{|h(x)|^{p'}}{p'}+\frac{|B(x)|^p}{p} \quad \forall x\in\Omega.$$

La función $m\in L^1(\Omega)$, pues $g\in L^2(\Omega)$, $h\in L^{p'}(\Omega)$ y $B\in L^p(\Omega)$.

Por lo tanto, existe una función $m\in L^1(\Omega)$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$,

$$|g_k(x)|\leq m(x) \quad c.t. \quad x\in\ \Omega.$$

Luego por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty}\left\|N_F\left(u_{n_k}\right)-N_F(u)\right\|_{L^1(\Omega)}=0.$$

Y por un resultado estándar de espacios métricos se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\|N_F(u_n)-N_F(u)\|_{L^1(\Omega)}=0\ .$$

Por lo tanto $N_F|_{H_0^1(\Omega)}$ es continua en u, lo que prueba que $N_F|_{H_0^1(\Omega)}$ es continua.

Las afirmaciones 4 y 5 prueban el presente teorema. ■

Teorema III.2.4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Supongamos que p satisface la condición (III.5), $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (III.6) y $F:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función definida por $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt$ para $c.t.\ x\in\Omega$ y para todo $s\in\mathbb{R}$. Entonces el funcional $\Psi\colon H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por

$$\Psi(u)=\int_\Omega F\big(x,u(x)\big)dx \quad \forall\, u\in H_0^1(\Omega)$$

es continuo en $H_0^1(\Omega)$ (según la norma) y Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$. Además, para cada $u\in H_0^1(\Omega)$, la derivada de Fréchet de Ψ en u, es

$$\Psi'(u)[v]=\int_\Omega F_s'(x,u(x))\ v(x)dx$$

$$=\int_\Omega f\big(x,u(x)\big)\ v(x)dx,$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)$.

Demostración.

Como Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y p satisface la condición (III.5), entonces

$$H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \text{ es una inmersión continua,} \tag{III.22}$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

Además

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ es una inmersión continua} \tag{III.23}$$

A continuación se probará que Ψ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

Afirmación 1. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $F(x, u(x)) \in L^1(\Omega)$, en particular $\Psi(u) \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$.

Esta afirmación es consecuencia del teorema III.2.3.

Afirmación 2. Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, el operador $\Psi'(u): H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo.

- Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ $f\big(x, u(x)\big)v(x) \in L^1(\Omega)$. En particular para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $\Psi'(u)$ es una función de $H_0^1(\Omega)$ en $\mathbb{R}$.

  Caso I. Si $1 < p \leq 2$ y p satisface (III.5).

  Dados $u \in H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, por el teorema III.2.1 y por la relación (III.22) $f(x, u(x)) \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, luego por la desigualdad de Hölder la función $f\big(x, u(x)\big)v(x) \in L^1(\Omega)$.

  Caso II. Si $2 < p$ y p satisface (III.5).

  Dados $u \in H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, por el teorema III.2.1 y por la relación (III.23) $f\big(x, u(x)\big) \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(\Omega)$, luego por la desigualdad de Hölder la función $f\big(x, u(x)\big)v(x) \in L^1(\Omega)$.

- Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, el operador $\Psi'(u)$ es lineal y continuo.

  Utilizando las propiedades de la integral de Lebesgue, se prueba que el operador $\Psi'(u)$ es lineal para cada $u \in H_0^1(\Omega)$. A continuación se probará que $\Psi'(u)$ es continuo para cada $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$.

Caso I. Si $1 < p \leq 2$ y p satisface (III.5).

Por el teorema III.2.1 $N_f u \in L^p(\Omega)$. Luego utilizando la relación (III.22) y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|\Psi'(u)[v]| \leq \left\|N_f u\right\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c\left\|N_f u\right\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Caso II. Si $2 < p$ y p satisface (III.5).

Por el teorema III.2.1 $N_f u \in L^2(\Omega)$. Luego utilizando la relación (III.23) y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|\Psi'(u)[v]| \leq \left\|N_f u\right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{c}\left\|N_f u\right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Afirmación 3. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0} \frac{|w(v)|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0,$$

donde

$$w(v) = \Psi(u+v) - \Psi(u) - \Psi'(u)[v] \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ fijo y sea $v \in H_0^1(\Omega)$.

Usando la definición de la función F y haciendo el cambio de variable $t = u(x) + sv(x),\ 0 \leq s \leq 1,$ se obtiene

$$\begin{aligned}
w(v) &= \Psi(u+v) - \Psi(u) - \Psi'(u)[v] \\
&= \int_\Omega F\big(x, u(x)+v(x)\big)dx - \int_\Omega F\big(x, u(x)\big)dx - \int_\Omega f\big(x, u(x)\big)\, v(x)dx \\
&= \int_\Omega \left[F\big(x, u(x)+v(x)\big) - F\big(x, u(x)\big) - f\big(x, u(x)\big)v(x)\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^{u(x)+v(x)} f(x,t)dt - \int_0^{u(x)} f(x,t)dt - \int_0^1 f\big(x, u(x)\big)v(x)dt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_{u(x)}^{u(x)+v(x)} f(x,t)dt - \int_0^1 f\big(x, u(x)\big)v(x)dt\right] dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left[\int_0^1 f\big(x, u(x) + sv(x)\big) v(x) ds - \int_0^1 f\big(x, u(x)\big) v(x) dt \right] dx$$

$$= \int_{\Omega} \int_0^1 \big[f\big(x, u(x) + tv(x)\big) - f\big(x, u(x)\big) \big] v(x)\, dt\, dx$$

$$= \int_{\Omega} \int_0^1 \big[N_f(u + tv) - N_f(u) \big] v(x)\, dt\, dx\, .$$

Luego por el teorema de Fubini

$$w(v) = \int_0^1 \int_{\Omega} \big[N_f(u + tv) - N_f(u) \big]\, v(x)\, dx dt \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Estudiaremos dos casos: $1 < p \leq 2$ y $2 < p$.

Caso I. Si $1 < p \leq 2$ y p satisface (III.5).

Por el teorema III.2.1, la desigualdad de Hölder y la relación (III.22) se deduce:

$$|w(v)| \leq \int_0^1 \big\| N_f(u + tv) - N_f(u) \big\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}} dt$$

$$\leq c \int_0^1 \big\| N_f(u + tv) - N_f(u) \big\|_{L^p} \|v\|_{H_0^1} dt\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde c es una constante.

De aquí:

$$0 \leq \frac{|w(v)|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq c \int_0^1 \big\| N_f(u + tv) - N_f(u) \big\|_{L^p}\, dt \qquad \text{(III. 24)}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Ahora se probará que

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0} \int_0^1 \big\| N_f(u + tv) - N_f(u) \big\|_{L^p} dt = 0, \qquad \text{(III. 25)}$$

lo cual es equivalente a probar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \big\| N_f(u + tv_n) - N_f(u) \big\|_{L^p} dt = 0\, ,$$

para toda sucesión $\{v_n\}$ en $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $v_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $\{v_n\}$ una sucesión en $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $v_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la función

$$g_n(t) = \left\| N_f(u + tv_n) - N_f(u) \right\|_{L^p} \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]$$

Usando el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se demostrará que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt = 0 \ .$$

- Existe $g \in L^1[0,1]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(t)| \leq g(t) \quad \forall\, t \in [0,1] \qquad \text{(III.26)}$$

  La desigualdad $1 < p \leq 2$ implica $p \leq 2 \leq p'$.

  Desde que $p \leq p'$ y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, se tiene

$$L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua.}$$

  Luego por (III.22) y por la inmersión anterior

$$H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega) \quad \text{es una inmersión continua .}$$

  Como $v_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es una inmersión continua, entonces existe una constante $k > 0$ tal que $\|v_n\|_{L^p} \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

  Dado $n \in \mathbb{N}$.

  De (III.22), del teorema III.2.1, de la condición (III.6) y de la afirmación anterior se deduce que

$$|g_n(t)| \leq 2|A|\|u\|_{L^p} + 2\|B\|_{L^p} + tk, \quad \forall t \in [0,1] \,.$$

  Sea $g(t) = 2|A|\|u\|_{L^p} + 2\|B\|_{L^p} + tk \quad \forall t \in [0,1]$.

  La función $g \in L^1[0,1]$, pues g es continua en $[0,1]$.

  Por lo tanto, existe $g \in L^1[0,1]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(t)| \leq g(t) \quad \forall\, t \in [0,1] \ .$$

- $g_n \in L^1[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

  Probaremos que g_n es continua en $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

  Sea t_0 un elemento de $[0,1]$, utilizando la desigualdad

$$\big|\|x\|_{L^p} - \|y\|_{L^p}\big| \leq \|x - y\|_{L^p} \qquad \forall x \in L^p(\Omega), \forall y \in L^p(\Omega).$$

  Se obtiene,

$$|g_n(t) - g_n(t_0)| \leq \left\| N_f(u + tv_n) - N_f(u + t_0 v_n) \right\|_{L^p} \quad \forall t \in [0,1] \ y \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Por el teorema III.2.1 $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continua, entonces

$$\lim_{t\to t_0} \left\| N_f(u + tv_n) - N_f(u + t_0 v_n) \right\|_{L^p} = 0 \,.$$

  Luego por la desigualdad de arriba y el límite anterior se tiene

$$\lim_{t\to t_0} g_n(t) = g_n(t_0) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto la función g_n es continua en $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego la función $g_n \in L^1\,[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues g_n es continua en $[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $g_n(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$ $\forall t \in [0,1]$.

  Dado $t \in [0,1]$. Como $N_f\big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left\| N_f(u+tv_n) - N_f(u) \right\|_{L^p} = 0\,.$$

Luego por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\| N_f(u+tv_n) - N_f(u) \right\|_{L^p} dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(t)dt \\ &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(t)dt \\ &= \int_0^1 0\,dt = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto de (III.24) y (III.25) se deduce que

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0} \frac{|w(v)|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

Caso II Si $2 < p$ y p satisface (III.5).

Por el teorema III.2.1, la desigualdad de Hölder y la relación (III.23) se deduce que:

$$\begin{aligned}|w(v)| &= \int_0^1 \left\| N_f(u+tv) - N_f(u) \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2}\, dt \\ &\le c\int_0^1 \left\| N_f(u+tv) - N_f(u) \right\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}\, dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

donde c es una constante.

Luego:

$$0 \le \frac{|w(v)|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \le c\int_0^1 \left\| N_f(u+tv) - N_f(u) \right\|_{L^2}\; dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Al igual que en el caso I, usando el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, la inmersión continua $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, el teorema III.2.1 y la desigualdad de arriba, se prueba que

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0} \frac{|w(v)|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

Afirmación 4. El funcional Ψ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y la derivada de Fréchet de Ψ en u, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, es como en este teorema.
Esta afirmación es consecuencia de las afirmaciones (2) y (3).

Afirmación 5. El funcional Ψ es continuo (según la norma).
Ψ es continuo, pues Ψ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

Las afirmaciones anteriores prueban el presente teorema. ■

Teorema III.2.5. Con las mismas hipótesis del teorema III.2.4, para todo $h \in L^p(\Omega)$, el funcional $\Phi: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_\Omega F\big(x, u(x)\big)dx - \int_\Omega h(x)u(x)dx, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, la derivada de Fréchet de Φ en u, es

$$\Phi'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx - \int_\Omega h(x)v(x)dx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración.

De la hipotesis se deduce que

$$H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \text{ es una inmersión continua,} \tag{III.27}$$

donde p' es el exponente conjugado de p.
Sea $\Phi_1: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\Psi: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\Phi_3: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx,$$

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx \quad y$$

$$\Phi_3(u) = \int_\Omega h(x)u(x)dx$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Se observa que

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Psi(u) - \Phi_3(u) \quad \text{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Antes de probar que Φ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ se probará que $\Phi(u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para todo $i = 1,2,3, \ldots \ldots N$ y por la desigualdad de Hölder $|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$, luego $\Phi_1(u) \in \mathbb{R}$.

Por el teorema III.2.3 $\Psi(u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, por la relación (III.27) y la desigualdad de Hölder se deduce que $hu \in L^1(\Omega)$, luego $\Phi_3(u) \in \mathbb{R}$.

Como $\Phi_1(u) \in \mathbb{R}$, $\Psi(u) \in \mathbb{R}$ y $\Phi_3(u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se concluye que $\Phi\ (u) \in \mathbb{R}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Usando la desigualdad de Hölder y la relación (III.27) se prueba que Φ_3 es lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$.

Por la proposición II.2.7, el teorema III.2.4 y la proposición II.2.6 Φ_1, Ψ y Φ_3 son Fréchet diferenciables en $H_0^1(\Omega)$ y

$$\Phi_1'\ (u)[v] = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx \quad para\ todo \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\Psi'(u)[v] = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx \quad para\ todo \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad y$$

$$\Phi_3'(u)[v] = \int_\Omega h(x)v(x)dx \quad para\ todo \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Como Φ_1, Ψ y Φ_3 son Fréchet diferenciables en $H_0^1(\Omega)$ entonces (por la proposición II.2.5) el funcional Φ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y su derivada es como la que está dada en este teorema. ■

CAPÍTULO IV

REORDENAMIENTO DE SCHWARZ Y LA FUNCIÓN DE LIPSCHITZ

Sean $a \in \mathbb{R}^N$ y un número real $r \geq 0$. El conjunto $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N / \|x - a\| \leq r\}$ es llamado bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) de centro a y radio r.

En el presente y siguiente capítulo, μ_1 y μ_N denotan la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^N$ respectivamente. Para cada $r \geq 0$ la medida de Lebesgue de la bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) de centro en el origen y radio r es

$$\omega_N r^N,$$

donde $\omega_N = \dfrac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} > 0$ y Γ es la función gamma.

Es inmediato verificar las siguientes afirmaciones:

Sean $r \geq 0$ y $s \geq 0$.

$\mu_N(\bar{B}_r(0)) \leq \mu_N(\bar{B}_s(0))$ si y solo si $\bar{B}_r(0) \subseteq \bar{B}_s(0)$ y

$\mu_N(\bar{B}_r(0)) = \mu_N(\bar{B}_s(0))$ si y solo si $\bar{B}_r(0) = \bar{B}_s(0)$.

IV.1 DEFINICIÓN, PROPIEDADES BÁSICAS DEL REORDENAMIENTO DE SCHWARZ Y FUNCIÓN DE LIPSCHITZ

Definición IV.1.1. Para cada conjunto no vacío medible Lebesgue D en $\mathbb{R}^N$ de medida finita, denotamos por D^* a la bola $\bar{B}_r(0) = \{ x \in \mathbb{R}^N / \|x\| \leq r\}$, cuya medida de Lebesgue es igual a la de D (es decir $\mu_N(D) = \mu_N(D^*)$). Si $D = \emptyset$, entonces $D^* = \emptyset$ (en particular $\mu_N(D) = \mu_N(D^*)$).

Si Ω es un conjunto no vacío, medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible Lebesgue acotada y definida en el conjunto Ω y $c \in \mathbb{R}$, se denota por $\Omega(c) = \{x \in \Omega \ / \ u(x) \geq c\}$. Este conjunto es medible Lebesgue para todo $c \in \mathbb{R}$.

Antes de definir el reordenamiento de Schwarz probaremos algunas proposiciones:

Proposición IV.1.2. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, medibles Lebesgue con medida finita. Si $A \subseteq B$ entonces $A^* \subseteq B^*$.

Demostración.

Si $A = \emptyset$, entonces $A^* = \emptyset$. Luego $A^* = \emptyset \subseteq B^*$.

Si $A \neq \emptyset$, entonces $B \neq \emptyset$. Por definición de A^* y B^* existen bolas cerradas (en $\mathbb{R}^N$) $\bar{B}_r(0)$ y $\bar{B}_s(0)$ tales que

$$A^* = \bar{B}_r(0), B^* = \bar{B}_s(0), \mu_N(A) = \mu_N(\bar{B}_r(0))\ y\ \mu_N(B) = \mu_N(\bar{B}_s(0)).$$

Como $A \subseteq B$ entonces

$$\mu_N(\bar{B}_r(0)) = \mu_N(A) \leq \mu_N(B) = \mu_N(\bar{B}_s(0)).$$

Y esta desigualdad implica

$$A^* = \bar{B}_r(0) \subseteq \bar{B}_s(0) = B^*. \quad \blacksquare$$

Proposición IV.1.3. Sean Ω un conjunto no vacío, medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue acotada y definida en el conjunto Ω. Denotemos por $m = \inf\{u(x)/x \in \Omega\}$ y $M = \sup\{u(x)/x \in \Omega\}$. Se cumple:

i) $\Omega(c)^* \subseteq \Omega^*$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

ii) Si $c > M$, entonces $\Omega(c) = \emptyset$, y por lo tanto $\Omega(c)^* = \emptyset$.

iii) Si $c < M$, entonces $\Omega(c) \neq \emptyset$, y por lo tanto $\Omega(c)^* \neq \emptyset$.

iv) Si $c = M$ y $M \in Ran\,(u)$, entonces $\Omega(c) \neq \emptyset$, y por tanto $\Omega(c)^* \neq \emptyset$.

v) Si $c = M$ y $M \notin Ran\,(u)$, entonces $\Omega(c) = \emptyset$, y por tanto $\Omega(c)^* = \emptyset$.

vi) Si $c \leq m$, entonces $\Omega(c) = \Omega$, y por lo tanto $\Omega(c)^* = \Omega^*$.

vii) Para cada $y \in \Omega^*$ fijo, el conjunto $A = \{ c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^* \}$ es no vacío y acotado superiormente.

Demostración.

i) Es consecuencia de la proposición anterior y $\Omega(c) \subseteq \Omega$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

ii) Sea $c > M$, supongamos que $\Omega(c) \neq \emptyset$, luego existe $a \in \Omega$ tal que $u(a) \geq c$, de la hipótesis $u(a) > M$ lo cual es una contradicción con la definición de supremo, por lo tanto $\Omega(c) = \emptyset$.

iii) Sea $c < M$, por definición de supremo existe $a \in \Omega$ tal que $c < u(a) \leq M$, luego $a \in \Omega(c)$. Es decir $\Omega(c) \neq \emptyset$.

iv) Como $M \in Ran(u)$, entonces $M = u(a)$ para algún $a \in \Omega$, luego $a \in \Omega(M)$. Es decir $\Omega(M) \neq \emptyset$.

v) Como $M \notin Ran(u)$, entonces $u(x) < M$ para todo $x \in \Omega$, luego $\Omega(M) = \emptyset$.

vi) Sea $c \leq m$. Por definición de $\Omega(c)$ se cumple $\Omega(c) \subseteq \Omega$.

Ahora probaremos $\Omega \subseteq \Omega(c)$. Sea $x \in \Omega$ entonces $u(x) \geq m \geq c$, luego $x \in \Omega(c)$. Por lo tanto $\Omega = \Omega(c)$.

vii) Sea $y \in \Omega^*$ fijo. Por (vi) $\Omega(m)^* = \Omega^*$, luego $y \in \Omega^* = \Omega(m)^*$, es decir $m \in A$, por lo tanto $A \neq \emptyset$.

Sea $c \in A$ entonces $y \in \Omega(c)^*$, luego $\Omega(c)^* \neq \emptyset$, por (ii) $c \leq M$, por lo tanto A es un conjunto acotado superiormente. ∎

Definición IV.1.4. Sean Ω un conjunto no vacío, medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita y $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue acotada y definida en el conjunto Ω. El *reordenamiento de Schwarz* de u es la función $u^*: \Omega^* \to \mathbb{R}$ definida en Ω^* por

$$u^*(y) = \sup\{c \in \mathbb{R} / \, y \in \Omega(c)^*\} \quad \text{para todo} \quad y \in \Omega^*.$$

Proposición IV.1.5. Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función como en la definición IV.1.4. Se define la función $f_u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_u(t) = \mu_N(\{x \in \Omega / u(x) \geq t\}) = \mu_N(\Omega(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se cumple:

i) $0 \leq f_u(t) \leq \mu_N(\Omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $f_u(t) = \mu_N(\Omega)$ si $t \leq \inf\{u\,(x)/x \in \Omega\}$ y $f_u(t) = 0$ si $t > \sup\{u\,(x)/x \in \Omega\}$.

ii) f_u es monótona no creciente. Es decir si $t < s$ entonces $f_u(t) \geq f_u(s)$.

iii) f_u es continua por la izquierda. Es decir si $c \in \mathbb{R}$ y $\{c_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $c_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_u\,(c_n) = f_u\,(c).$$

iv) Si $c \in \mathbb{R}$ y $\{c_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $c_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $c_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_u\,(c_n) = \mu_N(\{x \in \Omega / u(x) > c\}).$$

Demostración.

Como u es medible Lebesgue entonces el conjunto $\Omega(t) = \{x \in \Omega / u(x) \geq t\}$ es medible Lebesgue para todo $t \in \mathbb{R}$.

i) $0 \leq f_u(t) \leq \mu_N(\Omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues $\Omega(t) \subseteq \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora probaremos que $f_u(t) = \mu_N(\Omega)$ si $t \leq \inf\{u\,(x)/x \in \Omega\}$.

Sea $t \leq \inf\{u\,(x)/x \in \Omega\}$ entonces $\Omega(t) = \Omega$. Luego

$$f_u(t) = \mu_N\big(\Omega(t)\big) = \mu_N(\Omega).$$

Consideremos $t > \sup\{u\,(x)/x \in \Omega\}$, entonces $\Omega(t) = \{x \in \Omega/u(x) \geq t\} = \emptyset$. Luego

$$f_u(t) = \mu_N\big(\Omega(t)\big) = \mu_N(\emptyset) = 0,$$

lo cual termina la prueba de (i).

ii) Si $t < s$, entonces

$$\Omega(s) = \{x \in \Omega/u(x) \geq s\} \subseteq \{x \in \Omega/u(x) \geq t\} = \Omega(t),$$

luego

$$f_u(s) = \mu_N\{x \in \Omega/u(x) \geq s\} \leq u_N\{x \in \Omega/u(x) \geq t\} = f_u(t),$$

es decir $f_u(t) \geq f_u(s)$.

iii) Sea $c \in \mathbb{R}$ y $\{c_n\}$ sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $c_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $a_n = \inf\{c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$a_n \leq a_{n+1} < c,\ a_n \leq c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to c$ cuando $n \to \infty$.

Como

$$\Omega(a_{n+1}) = \{x \in \Omega/u(x) \geq a_{n+1}\} \subseteq \{x \in \Omega/u(x) \geq a_n\} = \Omega(a_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega(a_1)$ tiene medida finita, por un resultado de teoría de la Medida e Integración

$$\mu_N\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_N\big(\Omega(a_n)\big).$$

Pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(a_n) = \Omega(c)$, pues $a_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $a_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De los dos resultados de arriba se concluye que

$$\mu_N\big(\Omega(c)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(a_n)).$$

De la desigualdad $a_n \leq c_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\mu_N(\Omega(c)) \leq \mu_N(\Omega(c_n)) \leq \mu_N(\Omega(a_n)) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego por la desigualdad e igualdad anterior se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_u(c_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(c_n)) = \mu_N\big(\Omega(c)\big) = f_u(c).$$

iv) Sea $c \in \mathbb{R}$ y $\{c_n\}$ sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $c_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $c_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $b_n = \sup\{c_n, c_{n+1}, \ldots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$b_{n+1} \leq b_n,\ c < c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $b_n \to c$ cuando $n \to \infty$.

Como

$$\Omega(b_n) = \{x \in \Omega / u(x) \geq b_n\} \subseteq \{x \in \Omega / u(x) \geq b_{n+1}\} = \Omega(b_{n+1})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por un resultado de teoría de Medida e Integración

$$\mu_N\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(b_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(b_n))$$

Usando $b_n \to c$ cuando $n \to \infty$ y $c < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se prueba que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(b_n) = \{x \in \Omega / u(x) > c\}.$$

Por las dos igualdades anteriores

$$\lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(b_n)) = \mu_N(\{x \in \Omega / u(x) > c\}).$$

De la desigualdad $c < c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce

$$\mu_N(\Omega(b_n)) \leq \mu_N(\Omega(c_n)) \leq \mu_N(\{x \in \Omega / u(x) > c\}) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} f_u(c_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(c_n)) = \mu_N(\{x \in \Omega / u(x) > c\}). \quad \blacksquare$$

Proposición IV.1.6. Sean Ω un abierto no vacío acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{\Omega}$ y

$$m = \min\{u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega}\} < M = \max\{u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Entonces:

i) Para todo $t \in [m, M]$, $s \in [m, M]$ tales que $t < s$, existen $a \in \Omega$ y $q > 0$ tales que

$$B_q(a) \subseteq \{x \in \overline{\Omega} / t < u(x) < s\}.$$

ii) La función $f_u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_u(t) = \mu_N(\{x \in \overline{\Omega} / u(x) \geq t\}) = \mu_N(\overline{\Omega}(t)) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

es monótona decreciente en el intervalo $[m, M] = Ran(u)$. Es decir,

si $m \leq t < s \leq M$, entonces $f_u(t) > f_u(s)$.

Demostración.

i) Sean $t \in [m, M]$ y $s \in [m, M]$ tales que $t < s$. Como $t \in [m, M]$, $s \in [m, M]$ y u es continua en el conexo $\overline{\Omega}$ entonces por el Teorema del Valor Intermedio (T.V.I.) existen $d \in \overline{\Omega}$ y $b \in \overline{\Omega}$ tales que $t = u(d)$ y $s = u(b)$.

Aplicando otra vez el T.V.I. se deduce que existe $c \in \overline{\Omega}$ tal que

$$t = u(d) < u(c) < u(b) = s.$$

Luego, siendo u continua se concluye que existe $r > 0$ tal que

$$t = u(d) < u(x) < u(b) = s \quad \text{para todo} \quad x \in B_r(c) \cap \overline{\Omega}.$$

Como $c \in \overline{\Omega}$ entonces $B_r(c) \cap \Omega \neq \emptyset$, luego existe $a \in B_r(c) \cap \Omega$ y por ser este conjunto abierto

$$B_q(a) \subseteq B_r(c) \cap \Omega \subseteq B_r(c) \cap \overline{\Omega} \quad \text{para algún } q > 0.$$

De las dos afirmaciones anteriores se concluye que existen $a \in \Omega$ y $q > 0$ tales que

$$B_q(a) \subseteq \{x \in \overline{\Omega} / t < u(x) < s\}.$$

ii) Sean $t \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq t < s \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} f_u(t) - f_u(s) &= \mu_N\{x \in \overline{\Omega}/u(x) \geq t\} - \mu_N\{x \in \overline{\Omega}/u(x) \geq s\} \\ &= \mu_N\{x \in \overline{\Omega}/t \leq u(x) < s\} \\ &\geq \mu_N\{x \in \overline{\Omega}/t < u(x) < s\} \end{aligned} \tag{IV.1}$$

De (i) existen $q > 0$ y $a \in \Omega$ tales que

$$B_q(a) \subseteq \{x \in \overline{\Omega}/t < u(x) < s\}. \tag{IV.2}$$

De (IV.1) y (IV.2) se deduce que

$$f_u(t) - f_u(s) \geq \mu_N(B_q(a)) > 0, \quad \text{luego} \quad f_u(t) > f_u(s). \quad \blacksquare$$

Proposición IV.1.7. Sean Ω un conjunto no vacío, medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita y $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue acotada y definida en el conjunto Ω. Se cumple:

i) Si $y \in \Omega^*$, $z \in \Omega^*$ y $\|y\| = \|z\|$, entonces $u^*(y) = u^*(z)$.

ii) Si $y \in \Omega^*$, $z \in \Omega^*$ y $\|y\| < \|z\|$, entonces $u^*(y) \geq u^*(z)$.

iii) La función u^* es acotada y

$$\sup\{u(x)/x \in \Omega\} = \sup\{u^*(y)/y \in \Omega^*\} \in Ran(u^*).$$

iv) Si $c \in \mathbb{R}$, $\{c_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a c y $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega(c_n))^*.$$

En particular u^* es una función medible Lebesgue en Ω^*.

Demostración.

i) Sean $y \in \Omega^*$ y $z \in \Omega^*$ tales que $\|y\| = \|z\|$. Entonces

$$\{c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^*\} = \{c \in \mathbb{R}/z \in \Omega(c)^*\}.$$

Luego

$$u^*(y) = \sup\{c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^*\} = \sup\{c \in \mathbb{R}/z \in \Omega(c)^*\} = u^*(z).$$

ii) Sean $y \in \Omega^*$ y $z \in \Omega^*$ tales que $\|y\| < \|z\|$. Entonces

$$\{c \in \mathbb{R}/z \in \Omega(c)^*\} \subseteq \{c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^*\}.$$

Luego

$$u^*(z) = \sup\{c \in \mathbb{R}/z \in \Omega(c)^*\} \leq \sup\{c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^*\} = u^*(y).$$

iii) Sea r el radio de la bola cerrada Ω^* de centro el origen y w un elemento de $\mathbb{R}^N$ cuya norma es 1. Probaremos que u^* es una función acotada. Por (i) y (ii)

$u^*(rw) \leq u^*(y) \leq u^*(0)$ para todo $y \in \Omega^*$ (0 es el elemento nulo en $\mathbb{R}^N$).

Por lo tanto $Ran\,(u^*)$ es un conjunto acotado.

De la desigualdad anterior

$$\sup\{u^*\,(y)/y \in \Omega^*\} = u^*(0) \in Ran(u^*).$$

Sea $M = \sup\{u\,(x)/x \in \Omega\}$.

Probaremos que $u^*(0) = \sup\{c \in \mathbb{R}/0 \in \Omega\,(c)^*\} \leq M$.

Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 \in \Omega(c)^*$, luego $\Omega\,(c) \neq \emptyset$ y por la proposición IV.1.3.(ii)

$$c \leq M = \sup\{u\,(x)/x \in \Omega\}.$$

Luego M es una cota superior del conjunto $\{c \in \mathbb{R}/0 \in \Omega(c)^*\}$ y por definición de supremo $u^*(0) \leq M$.

Ahora probaremos $M \leq u^*(0)$.

Sea $a \in \Omega$, el conjunto $\Omega\big(u(a)\big) = \{x \in \Omega/u(x) \geq u(a)\} \neq \emptyset$, luego $0 \in \Omega\big(u(a)\big)^*$, de lo cual se concluye que $u(a) \in \{c \in \mathbb{R}/0 \in \Omega(c)^*\}$ y por definición de supremo se tiene

$$u(a) \leq u^*(0).$$

Luego $u(a) \leq u^*(0)$ para todo $a \in \Omega$.

Por lo tanto $M = \sup\{u\,(x)/x \in \Omega\} \leq u^*(0)$.

De las dos desigualdades $M = u^*(0)$.

iv) Sean $c \in \mathbb{R}$, $\{c_n\}$ sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a c y $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Probaremos

$$\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n))^*.$$

Por (iii) $u^*(0) = \sup\{u^*(y)/y \in \Omega^*\} = \sup\{u(x)/x \in \Omega\}$.

Se presentan los siguientes casos

Caso I. Si $c > u^*(0)$.

Entonces $\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} = \emptyset$

Como $c_n \to c$ y $c > u^*(0)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_n > u^*(0) \quad \text{para todo} \quad n \geq k.$$

Luego $\Omega(c_n) = \emptyset$ para todo $n \geq k$. Por lo tanto

$$\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\Omega(c_n)\right)^* = \emptyset.$$

Caso II. Si $c \leq u^*(0)$.

Sea $y \in \Omega^*$ tal que $u^*(y) \geq c$.

Como $c > c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$c_n < u^*(y) = \sup\{c \in \mathbb{R}/y \in \Omega(c)^*\} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por definición de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$y \in \Omega(b_n)^* \ \text{ y } \ c_n < b_n \leq u^*(y).$$

De la desigualdad de arriba se deduce $\Omega(b_n)^* \subseteq \Omega(c_n)^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$y \in \Omega(c_n)^* \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n))^*$.

Se ha probado $\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n))^*$.

Resta probar $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n))^* \subseteq \{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\}$.

Sea $y \in \Omega(c_n)^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por definición de $u^*(y)$ se cumple

$$c_n \leq u^*(y) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La desigualdad anterior implica

$$c \leq u^*(y).$$

Como $y \in \Omega(c_n)^* \subseteq \Omega^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $y \in \Omega^*$.

De las dos afirmaciones se tiene

$$y \in \Omega^* \ \text{ y } \ c \leq u^*(y).$$

Con lo cual se ha probado la inclusión. Por lo tanto

$$\{y \in \Omega^*/u^*(y) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n))^*.$$

Ahora vamos a probar que la función u^* es medible Lebesgue.

Dado $c \in \mathbb{R}$ y sea $c_n = c - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\{c_n\}$ converge a c y $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego se cumple

$$\{y \in \Omega^* / u^*(y) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega(c_n))^*.$$

Desde que $\Omega(c_n)^*$ son conjuntos medibles Lebesgue para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{y \in \Omega^* / u^*(y) \geq c\}$ es medible Lebesgue, por lo tanto u^* es una función medible Lebesgue. ■

Proposición IV.1.8. Sean Ω un conjunto no vacío, medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue acotada y definida en el conjunto Ω. Se cumple:

i) $\mu_N\{ x \in \Omega \,/\, u(x) \geq c \} = \mu_N\{ y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c \}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

ii) Si $M = sup\{ u(x) \,/\, x \in \Omega \} \in Ran(u)$, entonces

$$\Omega(c)^* = \{y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c\} \quad \text{para todo} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

i) Sea $c \in \mathbb{R}$, definimos la sucesión $c_n = c - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esta sucesión verifica las siguientes propiedades:

$$c_n \rightarrow c \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty \tag{IV.3}$$

$$c_n < c \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \tag{IV.4}$$

$$\text{y} \quad c_n < c_{n+1} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \tag{IV.5}$$

Por las relaciones (IV. 3), (IV.4) y la proposición IV.1.5 (iii) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(c_n)) = \mu_N\big(\Omega(c)\big) \tag{IV. 6}$$

De la relación (IV.5) se tiene que

$$\Omega(c_{n+1}) \subseteq \Omega(c_n) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \tag{IV.7}$$

De la definición de $\Omega(c)^*$ y de (IV.6) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mu_N(\Omega(c_n)^*) = \mu_N(\Omega(c)^*).$$

De la relación (IV.7)

$$\Omega(c_{n+1})^* \subseteq \Omega(c_n)^* \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como los conjuntos $\Omega(c_n)^*$ son medibles Lebesgue para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Omega(c_1)^*$ tiene medida finita y $\Omega(c_{n+1})^* \subseteq \Omega(c_n)^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mu_N\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_N\,(\Omega(c_n)^*).$$

Luego de las dos igualdades anteriores

$$\mu_N(\Omega(c)^*) = \mu_N\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*)\right) \qquad \text{(IV.8)}$$

Por la proposición IV.1.7 (iv)

$$\mu_N\{\, y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c\,\} = \mu_N\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*)\right)$$

De las dos igualdades anteriores y de la definición de $\Omega(c)^*$ se tiene

$$\mu_N\{\, x \in \Omega \,/\, u(x) \geq c\} = \mu_N\{\, y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c\,\}.$$

Con lo cual se ha probado (i).

ii) Sea $c \in \mathbb{R}$, se presentan los siguientes casos:

Caso I. Si $c > M = sup\{\, u(x) \,/\, x \in \Omega\,\}$.

Entonces $\Omega(c) = \emptyset$, luego $\Omega(c)^* = \emptyset$.

Por la proposición IV.1.7.(iii) $M = sup\{\, u^*(y) \,/\, y \in \Omega^*\,\}$, entonces

$$\{\, y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c\,\} = \emptyset.$$

Por lo tanto

$$\Omega(c)^* = \emptyset = \{\, y \in \Omega^* \,/\, u^*(y) \geq c\,\}.$$

Caso II. Si $c \leq M = sup\{\, u(x) \,/\, x \in \Omega\,\}$.

Por la proposición IV.1.3 (iii) y (iv) ($M \in Ran(u)$) el conjunto $\Omega(c) \neq \emptyset$, luego $\Omega(c)^*$ es una bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) de centro el origen y radio no negativo.

Sea $\{c_n\}$ la sucesión dada en (i), entonces

$$c_n < c \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por la proposición IV.1.3.(iii) $\Omega(c_n) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\Omega(c_n)^*$ es una bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) de centro el origen y radio no negativo, para todo $n \in \mathbb{N}$. De la afirmación anterior se deduce que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*)$$

es una bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) de centro el origen y radio no negativo.

Como $\Omega(c)^*$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*)$ son bolas cerradas de centro el origen y radios no negativos cuyas medidas de Lebesgue son iguales (ver relación (IV.8)), entonces

$$\Omega(c)^* = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega(c_n)^*).$$

Por la proposición IV.1.7.(iv) y por la igualdad anterior se concluye

$$\Omega(c)^* = \{\, y \in \Omega^* \;/\; u^*(y) \geq c \,\}.$$

En ambos casos se ha probado $\Omega(c)^* = \{\, y \in \Omega^* \;/\; u^*(y) \geq c \,\}$. ■

Proposición IV.1.9. Sean Ω un abierto acotado, conexo de $\mathbb{R}^N$, no vacío y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$max\{\, u(x) \;/\; x \in \overline{\Omega} \,\} = max\{\, u^*(y) \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \,\} \text{ y}$$

$$min\{\, u(x) \;/\; x \in \overline{\Omega} \,\} = min\{\, u^*(y) \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \,\}.$$

Demostración.

La función u tiene máximo y mínimo en $\overline{\Omega}$, pues u es continua en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$. Además existen $a \in \overline{\Omega}$ y $b \in \overline{\Omega}$ tales que

$$u(a) = min\{\, u(x) \;/\; x \in \overline{\Omega} \,\} \text{ y } u(b) = max\{\, u(x) \;/\; x \in \overline{\Omega} \,\}.$$

Se presentan dos casos:

Caso I. Si $u(a) < u(b)$.

Sean r el radio de la bola cerrada $\overline{\Omega}^*$ y w un elemento de $\mathbb{R}^N$ cuya norma es 1 (por ejemplo $w = (0, \dots, 0, 1)$, $\|w\| = 1$). Por la proposición IV.1.7 (i) y (ii)

$$u^*(rw) = min\{\, u^*(y) \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \} \text{ y } u^*(0) = max\{\, u^*(y) \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \}.$$

Por la proposición IV.1.7 (iii)

$$max\{\, u(x) \;/\; x \in \overline{\Omega} \,\} = max\{\, u^*(y) \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \,\}$$

Se probará que $u^*(rw) = u(a)$.

Sabemos que $u^*(rw) = sup\{\, c \in \mathbb{R} \;/\; rw \in \overline{\Omega}(c)^* \,\}$.

Como $u(a)$ es el mínimo de la función u en $\overline{\Omega}$, entonces $\overline{\Omega}\left(u(a)\right) = \overline{\Omega}$, luego $rw \in \overline{\Omega}\left(u(a)\right)^*$. Es decir $u(a) \in \{ c \in \mathbb{R} \,/\, rw \in \overline{\Omega}\,(\mathrm{c})^* \}$ y por definición de supremo

$$u(a) \leq u^*(rw).$$

Resta probar $u^*(rw) \leq u(a)$.

Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $rw \in \overline{\Omega}(c)^*$, entonces $\overline{\Omega}(c)^* = \overline{\Omega}^*$. También se cumple $\overline{\Omega}\left(u(a)\right) = \overline{\Omega}$. Estas dos afirmaciones implican

$$\mu_N\big(\overline{\Omega}(c)\big) = \mu_N\big(\overline{\Omega}\big(u(a)\big)\big) \qquad \text{(IV.9)}$$

Por la proposición IV.1.6.(ii), por la relación (IV.9) y por ser Ω un abierto no vacío

$$c \leq u(a).$$

Luego $u(a)$ es una cota superior del conjunto $\{ c \in \mathbb{R} \,/\, rw \in \overline{\Omega}(\mathrm{c})^* \}$ y por definición de supremo

$$u^*(rw) \leq u(a).$$

Por lo tanto

$$min\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \} = u(a) = u^*(rw) = min\{ u^*(y) \,/\, y \in \overline{\Omega}^*\}.$$

Caso II. Si $u(a) = u(b)$.

Entonces $u^*(y) = sup\{ c \in \mathbb{R} \,/\, y \in \overline{\Omega}(\mathrm{c})^* \} = u(a)$ para todo $y \in \overline{\Omega}^*$.

Luego

$$max\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \} = max\{ u^*(y) \,/\, y \in \overline{\Omega}^* \} = u(a) \quad \text{y}$$

$$min\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \} = min\{ u^*(y) \,/\, y \in \overline{\Omega}^* \} = u(a).$$

En ambos casos se ha probado esta proposición. ■

Proposición IV.1.10. Sean Ω un abierto acotado, conexo de $\mathbb{R}^N$, no vacío y $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{\Omega}$. Entonces

i) u^* es una función continua en $\overline{\Omega}^*$.

ii) $Ran(u) = Ran(u^*) = [m, M]$, donde $m = min\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \} \in \mathbb{R}$ y $M = max\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \} \in \mathbb{R}$.

iii) Para todo $c \in Ran(u^*)$ existe $s = min\{ \|y\| \;/\; y \in \overline{\Omega}^* \,\wedge\, u^*(y) = c \} \geq 0$ tal que $\{ y \in \overline{\Omega}^* \,/\; u^*(y) > c\} = B_s(0)$.

Demostración.

i) Como u es una función continua en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$, entonces la función u tiene un máximo y mínimo en $\overline{\Omega}$.

Sean $m = min\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \}$ y $M = max\{ u(x) \,/\, x \in \overline{\Omega} \}$. Se presentan los siguientes casos:

Caso I. Si $m < M$.

Para demostrar que u^* es continua, basta demostrar que $(u^*)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $\overline{\Omega}^*$ para todo intervalo abierto A.

Sea A un intervalo abierto entonces $A = \mathbb{R}$ o $]-\infty, a[$ o $]a, +\infty[$ o $]b, c[$,

donde $a \in \mathbb{R}$, b y c son números reales tales que $b \leq c$.

Si $A = \mathbb{R}$, entonces

$$(u^*)^{-1}(A) = \overline{\Omega}^* = \overline{\Omega}^* \cap \mathbb{R}^N.$$

Por lo tanto $(u^*)^{-1}(A)$ es un abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Si $A =]-\infty, a[$.

Por la proposición IV.1.8.(ii)

$$\{ y \in \overline{\Omega}^* \,/\, u^*(y) \geq a\} = \overline{\Omega}(a)^* \subseteq \overline{\Omega}^*.$$

El conjunto $\overline{\Omega}(a)^*$ es un conjunto cerrado en $\overline{\Omega}^*$, pues $\overline{\Omega}(a)^* = \overline{\Omega}(a)^* \cap \overline{\Omega}^*$ y $\overline{\Omega}(a)^*$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^N$.

También se cumple:

$$\begin{aligned}(u^*)^{-1}(A) &= (u^*)^{-1}(\mathbb{R} \setminus [a, +\infty[\,) \\ &= (u^*)^{-1}(\mathbb{R}) \setminus (u^*)^{-1}([a, +\infty[\,) \\ &= \overline{\Omega}^* \setminus \overline{\Omega}(a)^*.\end{aligned}$$

Como $(u^*)^{-1}(A) = \overline{\Omega}^* \setminus \overline{\Omega}(a)^*$ y $\overline{\Omega}(a)^*$ es un conjunto cerrado en $\overline{\Omega}^*$, entonces $(u^*)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Si $A =]a, +\infty[$.

Existe una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{gathered} a < a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,, \\ a_{n+1} < a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y} \\ a_n \to a \text{ cuando } n \to \infty \end{gathered} \tag{IV.10}$$

(Por ejemplo $a_n = a + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$)

La primera y tercera condición dada sobre la sucesión $\{a_n\}$ implica

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, +\infty[$$

Luego por la proposición IV.1.8.(ii) y la igualdad anterior

$$(u^*)^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(u^*)^{-1}([a_n, +\infty[)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\overline{\Omega}(a_n))^* \qquad \text{(IV.11)}$$

Por la proposición IV.1.9.

$$m = min\{\, u^*(y) \,/\, y \in \overline{\Omega}^* \,\} \;\text{ y }\; M = max\{\, u^*(y) \,/\, y \in \overline{\Omega}^* \,\}.$$

Se probará que $(u^*)^{-1}(A)$ es un abierto en $\overline{\Omega}^*$, cuando $a \geq M$, cuando $a < m$ y cuando $m \leq a < M$.

Si $a \geq M$.

Entonces $(u^*)^{-1}(A) = (u^*)^{-1}(\,]a, +\infty[\,) = \emptyset$, por lo tanto $(u^*)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Si $a < m$.

Entonces $(u^*)^{-1}(A) = (u^*)^{-1}(\,]a, +\infty[\,) = \overline{\Omega}^*$, por lo tanto $(u^*)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Si $m \leq a < M$.

Como $a < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a < M$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m < a_n < M \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por la proposición IV.1.3.(iii) $\overline{\Omega}(a_n) \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$, luego $\overline{\Omega}(a_n)^*$ es una bola cerrada (en $\mathbb{R}^N$) con centro en el origen, para todo $n \geq n_0$.

De las relaciones (IV.10) y (IV.11) se deduce

$$(u^*)^{-1}(A) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}(\overline{\Omega}(a_n))^*.$$

Sean r_n el radio de la bola cerrada $\overline{\Omega}(a_n)^*$ para cada $n \geq n_0$ y r el radio de la bola cerrada $\overline{\Omega}^*$.

Por la relación (IV.10), la proposición IV.1.6.(ii) y la definición de $\overline{\Omega}(a_n)^*$

$$r \geq r_{n+1} > r_n \geq 0 \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Como $\overline{\Omega}(a_n)^*$ es una bola cerrada con centro en el origen y radio $r_n \geq 0$, para todo $n \geq n_0$ y $0 \leq r_n < r_{n+1} \leq r$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty}(\overline{\Omega}(a_n))^*$$

es una bola abierta con centro en el origen y radio positivo contenida en $\overline{\Omega}^*$.

Es decir, existe $s > 0$ tal que

$$(u^*)^{-1}(A) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (\overline{\Omega}(a_n))^* = B_s(0) = B_s(0) \cap \overline{\Omega}^*.$$

Por lo tanto $(u^*)^{-1}(A)$ es un abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Si $A =]b, c[$.

Entonces $A =]b, +\infty[\ \cap\ ]-\infty, c[$, luego

$$(u^*)^{-1}(A) = (u^*)^{-1}(\,]b, +\infty[\,) \cap (u^*)^{-1}(\,]-\infty, c[\,).$$

Desde que $(u^*)^{-1}(\,]b, +\infty[\,)$ y $(u^*)^{-1}(\,]-\infty, c[\,)$ son conjuntos abiertos en $\overline{\Omega}^*$, el conjunto $(u^*)^{-1}(A)$ es un abierto en $\overline{\Omega}^*$.

Caso II. Si $m = M$.

Entonces

$$u^*(y) = sup\{\, c \in \mathbb{R} \ /\ y \in \overline{\Omega}(c)^* \,\} = m \quad \text{para todo} \quad y \in \overline{\Omega}^*.$$

Luego u^* es continua en $\overline{\Omega}^*$, pues esta función es constante en $\overline{\Omega}^*$.

En ambos casos se ha probado que u^* es continua.

ii) Como u y u^* son continuas en los conjuntos conexos y compactos no vacíos $\overline{\Omega}$ y $\overline{\Omega}^*$ respectivamente, entonces por el teorema del Valor Intermedio

$$Ran(u) = [k, K] \quad \text{y} \quad Ran(u^*) = [m, M].$$

Donde $k = min\{\, u^*(y) \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \,\}$, $K = max\{\, u^*(y) \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \,\}$,

$$m = min\{\, u(x) \ /\ x \in \overline{\Omega} \,\} \text{ y } M = max\{\, u(x) \ /\ x \in \overline{\Omega} \,\}.$$

Luego por la proposición IV.1.9

$$Ran(u) = Ran(u^*).$$

iii) Sea $c \in Ran(u^*)$.

Como $s = min\{\, \|y\| \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \wedge u^*(y) = c \,\} \geq 0$, entonces existe $a \in \overline{\Omega}^*$ tal que

$$u^*(a) = c \quad \text{y} \quad s = \|a\|.$$

Si $c = max\{\, u^*(y) \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \,\} = u^*(0)$.

Entonces

$$\{\, y \in \overline{\Omega}^* \ /\ u^*(y) > c\} = \emptyset \text{ y } s = min\{\, \|y\| \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \wedge u^*(y) = c \,\} = 0,$$

luego

$$\{\, y \in \overline{\Omega}^* \ /\ u^*(y) > c\} = \emptyset = B_s(0).$$

Si $c < max\{\, u^*(y) \ /\ y \in \overline{\Omega}^* \,\} = u^*(0)$.

Se probará

$$\{\, y \in \overline{\Omega}^* \;/\; u^*(y) > c\} = B_s(0).$$

Sea $y \in \overline{\Omega}^*$ tal que $u^*(y) > c = u^*(a)$, por proposición IV.1.7(i) y (ii)

$$\|y\| < \|a\| = s.$$

Por lo tanto $y \in B_s(0)$.

Sea $y \in B_s(0)$, entonces $\|y\| < s = \|a\|$.

Como $\|y\| < s = \|a\|$, $a \in \overline{\Omega}^*$ y $\overline{\Omega}^*$ es una bola cerrada de centro el origen, entonces $y \in \overline{\Omega}^*$.

Luego se tiene

$$y \in \overline{\Omega}^*,\; a \in \overline{\Omega}^* \text{ y } \|y\| < \|a\|.$$

Y por la proposición IV.1.7.(ii)

$$u^*(y) \geq u^*(a) = c.$$

Desde que $\|a\| = min\{\, \|y\| \,/\, y \in \overline{\Omega}^* \wedge u^*(y) = c\,\}$, $y \in \overline{\Omega}^*$ y $\|y\| < \|a\|$, se cumple $u^*(y) \neq u^*(a) = c$.

De las dos afirmaciones anteriores $u^*(y) > u^*(a) = c$.

Por lo tanto $y \in \overline{\Omega}^*$ y $u^*(y) > u^*(a) = c$. ■

El siguiente teorema es una generalización de un resultado de funciones equimedibles expuesto en $[4]$ de C. Bandle.

Teorema IV.1.11. (Equimedibilidad). Sean Ω un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ de medida finita, no vacío y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue, acotada y definida en Ω. Entonces

i) $\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(B))$ para todo intervalo B en $\mathbb{R}$.

ii) $\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(B))$ para todo conjunto de Borel B en $\mathbb{R}$.

iii) $\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(B))$ para todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$, si $Ran(u) = Ran(u^*)$.

Demostración.

Como u es una función medible Lebesgue, entonces u^* es una función medible, luego $u^{-1}(B)$ y $(u^*)^{-1}(B)$ son conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ para todo conjunto de

Borel B en $\mathbb{R}$. En particular $u^{-1}(B)$ y $(u^*)^{-1}(B)$ son conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ para todo intervalo B en $\mathbb{R}$.

i) Sea B un intervalo en $\mathbb{R}$. Hay nueve tipos de intervalos en $\mathbb{R}$, se probará i) para cada uno de estos tipos de intervalos.

Caso I. Si $B = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
Desde que $u^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, $(u^*)^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega^*$ y $\mu_N(\Omega) = \mu_N(\Omega^*)$, la afirmación i) es cierta para $B = \mathbb{R}$.

Caso II. Si $B = [c, +\infty[$ para algún $c \in \mathbb{R}$.
Por la proposición IV.1.8, la afirmación i) es cierta para $B = [c, +\infty[$.

Caso III. Si $B =]-\infty, c[$ para algún $c \in \mathbb{R}$.
Se cumplen:
$u^{-1}(\,]-\infty, c[\,) = \Omega \setminus u^{-1}(\,[c, +\infty[\,)$,
$(u^*)^{-1}(\,]-\infty, c[\,) = \Omega^* \setminus (u^*)^{-1}(\,[c, +\infty[\,)$ y
$\mu_N\big(u^{-1}(\,[c, +\infty[\,)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(\,[c, +\infty[\,))$.
Luego por las tres igualdades de arriba y por una propiedad de medida e integración, se obtiene

$$\begin{aligned}\mu_N\big(u^{-1}(\,]-\infty, c[\,)\big) &= \mu_N(\Omega) - \mu_N((u)^{-1}([c, +\infty[\,)) \\ &= \mu_N(\Omega^*) - \mu_N((u^*)^{-1}([c, +\infty[\,)) \\ &= \mu_N((u^*)^{-1}(\,]-\infty, c[\,)).\end{aligned}$$

Caso IV. Si $B =]c, +\infty[$ para algún $c \in \mathbb{R}$.
Sea $c_n = c + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces
$c_n > c_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
$c_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
$c_n \to c$ cuando $n \to \infty$.
Por las afirmaciones anteriores y por la proposición IV.1.5.(iv) se obtiene

$\mu_N\big(u^{-1}(\,]c, +\infty[\,)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_N(u^{-1}(\,[c_n, +\infty[\,))$ y
$\mu_N\big((u^*)^{-1}(\,]c, +\infty[\,)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_N((u^*)^{-1}(\,[c_n, +\infty[\,))$.

Luego por las dos igualdades de arriba y el caso II

$$\mu_N\big(u^{-1}(\,]c,+\infty[\,)\big) = \mu_N\big((u^*)^{-1}(\,]c,+\infty[\,)\big).$$

Caso V. Si $B = \,]-\infty, c]$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

Se cumplen:

$$u^{-1}(\,]-\infty,c]\,) = \Omega \setminus u^{-1}(\,]c,+\infty[\,),$$
$$(u^*)^{-1}(\,]-\infty,c]\,) = \Omega^* \setminus (u^*)^{-1}(\,]c,+\infty[\,) \text{ y}$$
$$\mu_N\big(u^{-1}(\,]c,+\infty[\,)\big) = \mu_N\big((u^*)^{-1}(\,]c,+\infty[\,)\big).$$

Luego por las tres igualdades de arriba y por una propiedad de medida e integración, se obtiene

$$\begin{aligned}\mu_N\big(u^{-1}(\,]-\infty,c]\,)\big) &= \mu_N(\Omega) - \mu_N\big(u^{-1}(\,]c,+\infty[\,)\big)\\ &= \mu_N(\Omega^*) - \mu_N((u^*)^{-1}(\,]c,+\infty[\,))\\ &= \mu_N\big((u^*)^{-1}(\,]-\infty,c]\,)\big).\end{aligned}$$

Caso VI. Si $B = \,]a,b[$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$.

Si $a = b$.

Entonces

$$u^{-1}(\,]a,b[\,) = u^{-1}(\emptyset) = \emptyset = (u^*)^{-1}(\emptyset) = (u^*)^{-1}(\,]a,b[\,).$$

Por lo tanto $\mu_N\big(u^{-1}(\,]a,b[\,)\big) = 0 = \mu_N((u^*)^{-1}(\,]a,b[\,))$.

Si $a < b$.

Como $]a,b[\, = \,]a,+\infty[\, \cap \,]-\infty,b[\, = \,]-\infty,b[\, \setminus \,]-\infty,a]$, entonces

$u^{-1}(\,]a,b[\,) = u^{-1}(\,]-\infty,b[\,) \setminus u^{-1}(\,]-\infty,a]\,)$ y

$(u^*)^{-1}(\,]a,b[\,) = (u^*)^{-1}(\,]-\infty,b[\,) \setminus (u^*)^{-1}(\,]-\infty,a]\,)$.

Desde que $a < b$

$u^{-1}(\,]-\infty,a]\,) \subseteq u^{-1}(\,]-\infty,b[\,)$ y

$(u^*)^{-1}(\,]-\infty,a]\,) \subseteq (u^*)^{-1}(\,]-\infty,b[\,)$.

De las cuatro afirmaciones anteriores y de una propiedad de teoría de la medida se obtiene

$$\mu_N\big(u^{-1}(\,]a,b[\,)\big) = \mu_N\big(u^{-1}(\,]-\infty,b[\,)\big) - u^{-1}(\,]-\infty,a]\,)$$
$$= \mu_N\big((u^*)^{-1}(]-\infty,b[)\big) - \mu_N((u^*)^{-1}(]-\infty,a]))$$
$$= \mu_N((u^*)^{-1}(\,]a,b[\,)).$$

Caso VII. Si $B = [a,b[$ o $B = \,]a,b]$ o $B = [a,b]$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$.

La prueba de la afirmación i) para los intervalos dados en este caso, es análogo al caso VI.

ii) Sean

$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ la colección de todos los intervalos del tipo $]a,b]$ o $]c,+\infty[$ o $]-\infty,d]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}$ y

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\, \bigcup_{i=1}^{n} I_i \;/\; n \in \mathbb{N},\; I_i \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \;\; \forall i = 1,2,\dots,n,\;\; I_1,\dots,I_n \;\, son \;\, intervalos \;\, disjuntos \;\, dos \;\, a \;\, dos \,\}$.

Por el teorema de la clase monótona:

La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ es igual a la mínima clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Se denotará a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ por $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, los elementos de $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ son llamados conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$ (o conjuntos Borelianos en $\mathbb{R}$).

Sea $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\, B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \;/\; \mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N\big((u^*)^{-1}(B)\big) \,\}$.

Se probará que $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

$\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, es cierto por definición de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Resta probar que $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$. Para probar esta inclusión es suficiente demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

A continuación se probará que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

a) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Como $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

b) Si $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Sean $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \;\text{ para todo }\; n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_N\big(u^{-1}(A_n)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(A_n)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y}$$

$$A_n \subseteq A_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Luego:

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$,

$u^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}})$ es un subconjuntos medible Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$(u^*)^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}})$ es un subconjuntos medible Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$u^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}}) \subseteq u^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n+1}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$(u^*)^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}}) \subseteq (u^*)^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n+1}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por las afirmaciones anteriores y por un resultado de teoría de la medida

$$\begin{aligned}
\mu_N\left(u^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\right) &= \mu_N\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} u^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}})\big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_N(u^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}}))\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_N((u^*)^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}}))\\
&= \mu_N\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(u^*)^{-\mathbf{1}}(A_{\boldsymbol{n}})\big)\\
&= \mu_N\left((u^*)^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

c) Si $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

La prueba de c) es análoga a la de b).

d) $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$

Sea $D \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $I_1 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}, I_2 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}, \ldots, I_n \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ intervalos disjuntos dos a dos tales que

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} I_i.$$

Como I_i es un intervalo en $\mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $I_i \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Y por ser $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ un σ-álgebra de $\mathbb{R}$, el conjunto

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

De la definición del conjunto D se deduce

$u^{-\mathbf{1}}(D) = \bigcup_{i=1}^{n} u^{-\mathbf{1}}(I_{\boldsymbol{i}})$,

$(u^*)^{-\mathbf{1}}(D) = \bigcup_{i=1}^{n} (u^*)^{-\mathbf{1}}(I_{\boldsymbol{i}})$,

$u^{-1}(I_1), \ldots, u^{-1}(I_n)$ son conjuntos disjuntos dos a dos y

$(u^*)^{-1}(I_1), \ldots, (u^*)^{-1}(I_n)$ son conjuntos disjuntos dos a dos.

Por las afirmaciones anteriores, por la parte (i) y por definición de medida

$$\mu_N(u^{-\mathbf{1}}(D)) = \sum_{i=1}^{n} \mu_N(\, u^{-\mathbf{1}}(I_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_N(\,(u^*)^{-\mathbf{1}}(I_i))$$
$$= \mu_N((u^*)^{-\mathbf{1}}(D)).$$

Por lo tanto $D \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

e) De a), b), c) y d) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Como $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es la mínima clase monótona en $\mathbb{R}$ que contiene a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, entonces $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Se ha probado que $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$, por lo tanto $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Y de la igualdad se concluye que

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N((u^*)^{-1}(B)) \quad \text{para todo conjunto de Borel } B \text{ en } \mathbb{R}.$$

iii) Sea B un conjunto de Borel en el $Ran(u)$, entonces existe un conjunto de Borel A en $\mathbb{R}$ tal que

$$B = A \cap Ran(u) = A \cap Ran(u^*).$$

También se cumplen:

$$u^{-\mathbf{1}}(B) = u^{-\mathbf{1}}\big(A \cap Ran(u)\big) = u^{-\mathbf{1}}(A) \quad \text{y}$$
$$(u^*)^{-\mathbf{1}}(B) = (u^*)^{-\mathbf{1}}\big(A \cap Ran(u^*)\big) = (u^*)^{-\mathbf{1}}(A).$$

Desde que $u^{-1}(A)$ y $(u^*)^{-1}(A)$ son conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$, $u^{-1}(B)$ y $(u^*)^{-1}(B)$ son conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$.

Por las dos igualdades de arriba y por la parte (ii)

$$\mu_N\left(u^{-\mathbf{1}}(B)\right) = \mu_N\left(u^{-\mathbf{1}}(A)\right)$$
$$= \mu_N\left((u^*)^{-\mathbf{1}}(A)\right)$$
$$= \mu_N\left((u^*)^{-\mathbf{1}}(B)\right),$$

lo cual termina la prueba del presente teorema. ■

Corolario IV.1.12. Sea Ω un conjunto abierto conexo acotado de $\mathbb{R}^N$ no vacío. Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{\Omega}$, $c \in Ran(u^*)$ y $\{\, x \in \overline{\Omega} \,/\, u(x) > c \,\}^* = \overline{B}_r(0)$ para algún $r \geq 0$, entonces $\{\, y \in \overline{\Omega}^* \,/\, u^*(y) > c \,\} = B_r(0)$.

Demostración.

Sean $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $\overline{\Omega}$ y $c \in Ran(u^*)$.

Por la proposición IV.1.10, existe $s \geq 0$ tal que

$$\{ y \in \overline{\Omega}^* \,/\, u^*(y) > c \} = B_s(0).$$

En virtud de la afirmación anterior, del teorema IV.1.11 y de la hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} \mu_N\big(B_s(0)\big) &= \mu_N(\{ y \in \overline{\Omega}^* \,/\, u^*(y) > c \}) \\ &= \mu_N(\{ x \in \overline{\Omega} \,/\, u(x) > c \}) \\ &= \mu_N(\bar{B}_r(0)). \end{aligned}$$

Luego $s = r$.

Por lo tanto $\{ y \in \overline{\Omega}^* \,/\, u^*(y) > c \} = B_r(0)$. ■

Definición IV.1.13. Sea Ω un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto Ω se dice que satisface la *condición de Lipschitz* en Ω o que es una *función de Lipschitz* en Ω, si existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$|f(a) - f(b)| \leq k\|a - b\| \quad \text{para todo} \quad a \in \Omega \quad \text{y} \quad \text{para todo} \quad b \in \Omega.$$

También se define la constante de Lipschitz de f como

$$Lip(f) = inf\{ k \geq 0 \,/\, |f(a) - f(b)| \leq k\|a - b\| \quad \forall a \in \Omega, \forall b \in \Omega \},$$

para toda función f de Lipschitz en Ω.

Para cada función f de Lipschitz en Ω, $Lip(f)$ es un número real, pues el conjunto que define a $Lip(f)$ no es vacío y es acotado inferiormente.

A continuación se darán algunas propiedades básicas de funciones de Lipschitz en la siguiente proposición.

Proposición. IV.1.14. Sean f y g funciones de Lipschitz en Ω y $c \in \mathbb{R}$. Se cumple:

i) $Lip(f) \geq 0$.

ii) $|f(a) - f(b)| \leq Lip(f)\|a - b\|$ para todo $a \in \Omega$ y para todo $b \in \Omega$.

iii) $f + g$ es una función de Lipschitz en Ω y $Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$.

iv) cf es una función de Lipschitz en Ω y $Lip(cf) = |c|Lip(f)$.

v) $Lip(f) = 0$ si y solamente si f es una función constante en Ω.

Demostración.

Es mediante la definición de función de Lipschitz y constante de Lipschitz. ■

El siguiente resultado está demostrado en $[4]$ de C. Bandle, ver lema 2.1. Aquí mostramos los detalles de la prueba del lema 2.1 que no son explícitos.

Teorema IV.1.15. Sean Ω un conjunto abierto, acotado, conexo de $\mathbb{R}^N$, no vacío y u una función de $\overline{\Omega}$ en $\mathbb{R}$. Si $u \geq 0$ en $\overline{\Omega}$, $u = 0$ en $\partial\Omega$ y existe una constante $k \geq 0$ tal que $|u(a) - u(b)| \leq k\|a - b\|$ para todo $a \in \overline{\Omega}$ y $b \in \overline{\Omega}$.

Entonces

$$|u^*(y) - u^*(z)| \leq k\|y - z\| \quad \text{para todo } y \in \overline{\Omega}^* \text{ y para todo } z \in \overline{\Omega}^*.$$

En particular u^* es una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}^*$ y $0 \leq Lip(u^*) \leq Lip(u)$.

Demostración.

Como u es una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}$, entonces u es una función continua en $\overline{\Omega}$.

Sean $y \in \overline{\Omega}^*$ y $z \in \overline{\Omega}^*$, se presentan los siguientes casos:

Caso I. Si $\|y\| = \|z\|$.

Por la proposición IV.1.7.(i) $u^*(y) = u^*(z)$, entonces se tiene

$$|u^*(y) - u^*(z)| = 0 \leq k\|y - z\|.$$

Caso II. Si $\|y\| < \|z\|$ y $u^*(y) = u^*(z)$.

Se cumple $|u^*(y) - u^*(z)| = 0 \leq k\|y - z\|$.

Caso III. Si $\|y\| < \|z\|$ y $u^*(y) \neq u^*(z)$.

Por la proposición IV.1.7.(ii) $u^*(y) > u^*(z)$. Considerando los conjuntos $\Omega_1 = \{\, x \in \overline{\Omega} \,/\, u(x) \geq u^*(y) \,\}$ y $\Omega_2 = \{\, x \in \overline{\Omega} \,/\, u(x) > u^*(z) \,\}$, es inmediato de $u^*(y) > u^*(z)$ que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

Por la proposición IV.1.10(ii) $u^*(z) \geq 0$ y como $u = 0$ en $\partial\Omega$ entonces $\Omega_2 = \{\, x \in \Omega \,/\, u(x) > u^*(z) \,\}$.

Desde que u es continua en $\overline{\Omega}$, el conjunto Ω_1 es un conjunto compacto y medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y Ω_2 es un conjunto abierto y medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Por la proposición IV.1.10.(ii) $u^*(y) = u(a)$ para algún $a \in \overline{\Omega}$, entonces $a \in \Omega_1$ y $a \in \Omega_2$. Es decir Ω_1 y Ω_2 son conjuntos no vacios.
De la afirmación anterior $(\Omega_1)^*$ y $(\Omega_2)^*$ son bolas cerradas de centro el origen, sean r_1 y r_2 los radios de $(\Omega_1)^*$ y $(\Omega_2)^*$ respectivamente.

__Afirmación 1__. $\|y\| \leq r_1 < r_2 \leq \|z\|$.

Se sabe que u es continua en $\overline{\Omega}$. Por la proposición IV.1.8.(ii) $y \in (\Omega_1)^*$, entonces $\|y\| \leq r_1$. Por el corolario IV.1.12 $\{ w \in \overline{\Omega}^* / \, u^*(w) > u^*(z) \} = B_{r_2}(0)$ y como $z \notin B_{r_2}(0)$ se tiene $\|z\| \geq r_2$.
Es inmediato verificar que

$$\Omega_2 \setminus \Omega_1 = \{ x \in \overline{\Omega} \, / \, u^*(z) < u(x) < u^*(y) \}.$$

Por la proposición IV.1.10 $u^*(y)$ y $u^*(z)$ son elementos del $Ran(u)$, luego aplicando la proposición IV.1.6.(i) se deduce que

$$\mu_N(\Omega_2 \setminus \Omega_1) > 0.$$

Como $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, Ω_2 tiene medida de Lebesgue finita, $\mu_N({\Omega_2}^*) = \mu_N(\Omega_2)$ y $\mu_N({\Omega_1}^*) = \mu_N(\Omega_1)$, entonces

$$\mu_N({\Omega_2}^*) - \mu_N({\Omega_1}^*) = \mu_N(\Omega_2) - \mu_N(\Omega_1) = \mu_N(\Omega_2 \setminus \Omega_1) > 0.$$

Luego se tiene $\mu_N({\Omega_1}^*) < \mu_N({\Omega_2}^*)$ y por ser $(\Omega_1)^*$ y $(\Omega_2)^*$ bolas cerradas con centro en el origen y radios r_1 y r_2 respectivamente se deduce que $r_1 < r_2$.

__Afirmación 2__. Sea $\rho = d(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \inf\{ \|a - b\| \; / \; a \in \partial\Omega_1, b \in \partial\Omega_2 \}$, entonces $\rho > 0$.

Como Ω_1 y Ω_2 son conjuntos acotados en $\mathbb{R}^N$ (por ende distintos de $\mathbb{R}^N$) y no vacíos, entonces $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ son conjuntos compactos y no vacíos, luego existen $a_0 \in \partial\Omega_1$ y $b_0 \in \partial\Omega_2$ tales que $d(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \|a_0 - b_0\|$.
Es inmediato desde que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$,

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_2} \; .$$

Y como Ω_1 es compacto (en particular cerrado) y Ω_2 es abierto entonces

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Omega_1 \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega_2).$$

Utilizando $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ se tiene $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$.
Luego $a_0 \neq b_0$ y de $d(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \|a_0 - b_0\|$ se tiene

$$d(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) > 0.$$

Afirmación 3. $\Omega_1 \subseteq (\Omega_2)_{-\rho} = \{ x \in \mathbb{R}^N \ / \ x \in \Omega_2 \ \wedge \ d(x, \partial\Omega_2) \geq \rho \}$.

Sea $x \in \Omega_1$, como $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ entonces $x \in \Omega_2$.

Como $\partial\Omega_2$ es un conjunto cerrado no vacío, entonces existe $b \in \partial\Omega_2$ tal que

$$d(x, \partial\Omega_2) = \|x - b\|.$$

Desde que Ω_2 es un conjunto abierto y $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, se tiene $\partial\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \Omega_1$. Luego $b \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_1$.

Sea $C = \{ (1-t)x + tb \ / \ t \in [0,1] \}$, $C \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto conexo, pues C es la imagen de un conjunto conexo por una función continua.

Como $x \in C \cap \Omega_1$, $b \in C \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega_1)$ y C es un conjunto conexo, entonces por el teorema de Alfândega existe $c \in C \cap \partial\Omega_1$.

Por ser C un segmento de recta y por la afirmación 2

$$d(x, \partial\Omega_2) = \|x - b\| = \|x - c\| + \|c - b\| \geq \|c - b\| \geq \rho.$$

Juntando las afirmaciones anteriores se tiene

$$x \in \Omega_2 \quad \text{y} \quad d(x, \partial\Omega_2) \geq \rho.$$

Por lo tanto $x \in (\Omega_2)_{-\rho}$.

Afirmación 4. Sea $r_{-\rho}$ el radio de la bola cerrada de centro el origen cuya medida de Lebesgue es $\mu_N((\Omega_2)_{-\rho})$. Entonces $r_1 \leq r_{-\rho}$ y $r_{-\rho} \leq r_2 - \rho$. En consecuencia $r_1 \leq r_2 - \rho$.

Desde que $\Omega_1 \subseteq (\Omega_2)_{-\rho}$ y Ω_1 es un conjunto no vacío se sigue que $r_1 \leq r_{-\rho}$ y que $(\Omega_2)_{-\rho}$ es un conjunto no vacío.

Como Ω_2 es un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ abierto, acotado, no vacío y $(\Omega_2)_{-\rho}$ es un conjunto no vacío, entonces por el teorema I.2.17 $r_{-\rho} + \rho \leq r_2$, es decir

$$r_{-\rho} \leq r_2 - \rho.$$

Afirmación 5. $|u^*(y) - u^*(z)| \leq k\|y - z\|$.

Se sabe que $\Omega_1 = \{ x \in \overline{\Omega} \ / \ u(x) \geq u^*(y) \}$ y $\Omega_2 = \{ x \in \overline{\Omega} \ / \ u(x) > u^*(z) \}$.

Como Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ no vacío, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{\Omega}$, $u \geq 0$ en $\overline{\Omega}$, $u = 0$ en $\partial\Omega$, $u^*(y) \in Ran(u)$ y $u^*(z) \in Ran(u)$, entonces

$$\partial\Omega_1 \subseteq \{ x \in \overline{\Omega} \ / \ u(x) = u^*(y) \} \ \text{y}$$

$$\partial\Omega_2 \subseteq \{ x \in \overline{\Omega} \ / \ u(x) = u^*(z) \}.$$

En la afirmación 2, se probó que existen $a_0 \in \partial\Omega_1$ y $b_0 \in \partial\Omega_2$ tales que

$$0 < \rho = d(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \|a_0 - b_0\|.$$

Luego por las dos afirmaciones anteriores $u^*(y) = u(a_0)$ y $u^*(z) = u(b_0)$.

Por ser u una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}$, por la afirmación 4, la afirmación 1 y la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |u^*(y) - u^*(z)| &= |u(a_0) - u(b_0)| \\ &\leq k\|a_0 - b_0\| \\ &= k\,\rho \\ &\leq k(r_2 - r_1) \\ &\leq k(\|z\| - \|y\|) \\ &\leq k\|z - y\| \\ &= k\|y - z\|. \end{aligned}$$

De la **afirmación 5** se concluye que $|u^*(y) - u^*(z)| \leq k\|y - z\|$, cuando y y z verifican la condición dada en el **caso III**.

Caso IV. Si $\|z\| < \|y\|$ y $u^*(z) = u^*(y)$.
Se cumple $|u^*(y) - u^*(z)| = 0 \leq k\|y - z\|$.

Caso V. Si $\|z\| < \|y\|$ y $u^*(z) \neq u^*(y)$. La demostración es análoga a la del caso III.

Luego se ha probado

$$|u^*(y) - u^*(z)| \leq k\|y - z\| \quad \text{para todo} \quad y \in \overline{\Omega}^* \quad \text{y para todo} \quad z \in \overline{\Omega}^*.$$

Es decir u^* es una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}^*$. Y por la definición de $Lip(u^*)$ se concluye

$$0 \leq Lip(u^*) \leq Lip(u). \quad \blacksquare$$

IV.2 LA MEDIDA DE LEBESGUE DE LA IMAGEN INVERSA DE UN CONJUNTO DE BOREL POR UNA FUNCION DE LIPSCHITZ

El siguiente resultado está demostrado en el artículo $[6]$, ver lema 2.2. Aquí mostramos los detalles de la prueba del lema 2.2 que no son explícitos.

Lema IV.2.1. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ y no decreciente. Si $D \subseteq [a, b]$ es un conjunto medible y E es un intervalo cuyo extremo izquierdo es el punto a y cuya longitud es $\mu_1(D)$. Entonces

$$\int_E f \leq \int_D f. \tag{IV.12}$$

Demostración.

Sea c el extremo derecho del intervalo E.

De la hipótesis $\mu_1(E) = \mu_1(D) \leq \mu_1([a, b])$, se obtiene $c \leq b$.Luego

$$E \subseteq [a, c] \subseteq [a, b].$$

Como f es no decreciente en $[a, b]$, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es numerable (en particular f es continua en casi todo punto de $[a, b]$), luego f es medible en $[a, b]$.

Desde que f es medible y acotada en $[a, b]$, f es Lebesgue integrable en $[a, b]$. Por lo tanto la integral de Lebesgue de la función f sobre cualquier conjunto medible Lebesgue incluido en $[a, b]$ existe y es finita.

Sea $F = [a, c]$, como $E \subseteq F$, $\mu_1(F \setminus E) = 0$ y f es Lebesgue integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_E f = \int_F f.$$

Sean $A = D \setminus (D \cap F)$ y $B = F \setminus (D \cap F)$. Desde que el conjunto D es la unión disjunta de los conjuntos medibles A y $D \cap F$ y F es la unión disjunta de los conjuntos medibles B y $D \cap F$, se cumple

$$\int_D f = \int_A f + \int_{D \cap F} f \quad \text{y}$$

$$\int_F f = \int_B f + \int_{D \cap F} f.$$

Gracias a estas dos igualdades es cierta la siguiente afirmación:

Si $\int_B f \leq \int_A f$, entonces $\int_E f \leq \int_D f$.

Es suficiente probar la desigualdad

$$\int_B f \leq \int_A f \tag{IV.13}$$

para demostrar la desigualdad (IV.12).

A continuación se probará la desigualdad (IV.13).

Como $A = D \setminus (D \cap F)$, $B = F \setminus (D \cap F)$, $\mu_1(F) = \mu_1(D)$ y F tiene medida finita, entonces

$$\mu_1(A) = \mu_1(B). \tag{IV.14}$$

Se presentan los siguientes casos

Caso I. Si $A = D \setminus (D \cap F) \neq \emptyset$ y $B = F \setminus (D \cap F) \neq \emptyset$.

Desde que $B \subseteq F = [a, c]$, c es una cota superior del conjunto B. Y como B es un conjunto no vacío acotado superiormente por c, entonces el conjunto B posee supremo en $\mathbb{R}$ y $\sup(B) \leq c$.

Como $A = D \setminus (D \cap F)$, $D \subseteq [a, b]$ y $F = [a, c]$, entonces $A = D \cap \,]c, +\infty[$. Luego c es una cota inferior del conjunto A. Y desde que A es un conjunto no vacío acotado inferiormente por c, se tiene que el conjunto A posee ínfimo en $\mathbb{R}$ y $c \leq \inf(A)$.

El $\sup(B)$ e $\inf(A)$ están en el intervalo $[a, b]$, pues A y B son subconjuntos de $[a, b]$.

De las tres afirmaciones anteriores

$$a \leq \sup(B) \leq c \leq \inf(A) \leq b.$$

Y por ser f no decreciente

$$f(\sup(B)) \leq f(\inf(A)),$$

$$f(x) \leq f(\sup(B)) \quad \text{para todo} \quad x \in B \ \text{ y}$$

$$f(\inf(A)) \leq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

De la igualdad (IV.14) y de las tres últimas desigualdades, se tiene

$$\int_B f \leq \mu_1(B) f(\sup(B)) \leq \mu_1(A) f(\inf(A)) \leq \int_A f.$$

Caso II. Si $A = D \setminus (D \cap F) = \emptyset$ o $B = F \setminus (D \cap F) = \emptyset$.

Si $A = D \setminus (D \cap F) = \emptyset$.

Entonces $D \subseteq F$, luego $\mu_1(B) = \mu_1(F \setminus D) = \mu_1(F) - \mu_1(D) = 0$. Y por ser f Lebesgue integrable en $[a, b]$

$$\int_B f = 0 = \int_A f.$$

Si $B = F \setminus (D \cap F) = \emptyset$.

Entonces $F \subseteq D$, luego $\mu_1(A) = \mu_1(D \setminus F) = \mu_1(D) - \mu_1(F) = 0$. Y por ser f Lebesgue integrable en $[a, b]$

$$\int_B f = 0 = \int_A f.$$

De ambos casos, la desigualdad (IV.13) es cierta, por lo tanto la desigualdad (IV.12) también es cierta. ■

Siguiendo la sugerencia de D. G. de Figueiredo y J.- P. Gossez dada en [6], demostraremos a continuación el siguiente resultado.

Lema IV.2.2. Sean Ω un conjunto abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$ no vacío, $w \in \mathbb{R}^N$ tal que $||w|| = 1$ y s es la longitud del radio de la bola cerrada $\overline{\Omega}^*$ con centro en el origen. Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz no negativa en $\overline{\Omega}$ que se anula en $\partial\Omega$ y $g : [0, s] \to \mathbb{R}$ es la función definida por $g(r) = u^*(rw)$ para todo $r \in [0, s]$, entonces

$$\mu_1(B) = \int_{g^{-1}(B)} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr \qquad \text{(IV.15)}$$

para todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$.

Demostración.

En virtud del teorema IV.1.15 u^* es una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}^*$, luego g es una función de Lipschitz en el intervalo $[0, s]$.

Por las proposiciones IV.1.7 y IV.1.10 g es una función no creciente en el intervalo $[0, s]$ y $Ran(g) = Ran(u) = Ran(u^*) = [m, M]$ para algún $m \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}$.

Como g es una función de Lipschitz en $[0, s]$, entonces g' existe en casi todo punto de $[0, s]$, g' es integrable Lebesgue en $[0, s]$ y

$$g(r_2) - g(r_1) = \int_{[r_1, r_2]} g'(r) dr \qquad \text{(IV.16)}$$

para todo $r_1, r_2 \in [0, s]$ tal que $r_1 \leq r_2$.

Desde que g es una función no creciente en $[0, s]$ y derivable en casi todo punto de $[0, s]$, se cumple

$$|g'(r)| = -g'(r) \quad c.t. \quad r \in [0, s].$$

La función g es medible Lebesgue en $[0,s]$, pues g es una función de Lipschitz en $[0,s]$ y $[0,s]$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Como g es medible Lebesgue en $[0,s]$ y $Ran(g) = Ran(u)$, entonces $g^{-1}(B)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$ para todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$.

Desde que g' es una función integrable Lebesgue en $[0,s]$, $g^{-1}(B) \subseteq [0,s]$ y $g^{-1}(B)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$ para todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$, se cumple que la integral de Lebesgue de la función $|g'|$ sobre el conjunto $g^{-1}(B)$ existe y es finita, para todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$.

Todo conjunto de Borel en el $Ran(u)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$, pues $Ran(u)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Primero se probará la igualdad (IV.15) cuando B es un intervalo incluido en el $Ran(u)$, después cuando $B = C \cap Ran(u)$, donde C es un intervalo en $\mathbb{R}$ y por último cuando B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$. A continuación se probará la igualdad (IV.15) para cada uno de estos conjuntos.

Caso I. Si B es un intervalo que está incluido en el $Ran(u)$.

Sea B un intervalo incluido en el $Ran(u) = [m,M]$, entonces $B =]a,b[\ o\ ]a,b]\ o$ $[a,b[\ o\ [a,b]$ para algún a y b números reales tales que $a \le b$.

Como B es un intervalo incluido en el $Ran(u)$, entonces B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$. Luego por lo escrito líneas arriba B y $g^{-1}(B) \subseteq [0,s]$ son conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la integral de Lebesgue de $|g'|$ sobre $g^{-1}(B)$ existe y es finita.

Desde que $B \subseteq Ran(u) = Ran(g)$ y $Ran(u)$ es un intervalo cerrado y acotado, los conjuntos $\{r \in [0,s] \,/\, g(r) = a\}$ y $\{r \in [0,s] \,/\, g(r) = b\}$ son no vacíos. Y por ser g continua en $[0,s]$ estos conjuntos son compactos en $\mathbb{R}$, luego dichos conjuntos tienen máximo y mínimo.

Se probará la igualdad (IV.15) cuando $B =]a,b[$, para los otros intervalos la demostración es análoga al caso $B =]a,b[$.

Si $B =]a,b[$ para algún a y b números reales tales que $a \le b$.

Sean $c = max\{r \in [0,s] \,/\, g(r) = b\} \in \mathbb{R}$ y

$d = min\{r \in [0,s] \,/\, g(r) = a\} \in \mathbb{R}$.

Como la función g es no creciente en $[0,s]$, entonces

$$g^{-1}(B) = g^{-1}(\,]a,b[\,) =]c,d[.$$

Cuando $a = b$, entonces $B =]a, a[= \emptyset$ y $g^{-1}(B) = \emptyset$. Luego

$$\mu_1(B) = 0 = \int_{g^{-1}(B)} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr.$$

Cuando $a < b$.

Como la función g es no creciente en $[0, s]$ y $a < b$ entonces $c \leq d$.

De la relación (IV.16), de la definición de c y d y de $g^{-1}(B) =]c, d[$, se tiene

$$\mu_1(B) = -\big(g(d) - g(c)\big) = -\int_{[c\,,d]} g'(r)dr = -\int_{]c\,,d[} g'(r)dr = \int_{g^{-1}(B)} |g'(r)|dr.$$

Por lo tanto la relación (IV.15) es cierta cuando $B =]a, b[$.

Caso II. Si $B = C \cap Ran(u)$ para algún intervalo C en $\mathbb{R}$.

Sea $B = C \cap Ran(u)$ para algún intervalo C en $\mathbb{R}$.

Desde que C es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $Ran(u)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ cerrado y acotado, $B = C \cap Ran(u)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ incluido en el $Ran(u)$. Luego por el caso I, la igualdad (IV.15) es cierta cuando $B = C \cap Ran(u)$ para algún intervalo C en $\mathbb{R}$.

Caso III. Si B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$.

Se denotaran a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y a la σ-álgebra de Borel de $Ran(u)$ por $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(Ran(u))$ respectivamente, los elementos de $\boldsymbol{\mathcal{B}}(Ran(u))$ son llamados conjuntos de Borel en el $Ran(u)$ (o conjuntos Borelianos en el $Ran(u)$).

Por definición

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\big(Ran(u)\big) = \{\, A \cap Ran(u) \;/\; A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \,\}$$

Se probará la igualdad (IV.15) para todo conjunto de Borel en el $Ran(u)$, con lo cual se probaría el presente lema.

Sean

$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ la colección de todos los intervalos del tipo $]a, b]$ o $]c, +\infty[$ o $]-\infty, d]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}$ y

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\, \bigcup_{i=1}^{n} I_i \;/\; n \in \mathbb{N},\; I_i \in \boldsymbol{\mathcal{M}} \;\; \forall i = 1,2,\dots,n,\;\; I_1, \dots, I_n \;\; son\ intervalos\ disjuntos\ dos\ a\ dos \,\}.$

Por el teorema de la clase monótona:

La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ es igual a la mínima clase monótona en $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Sea

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{\, A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \ / \ la\ igualdad\ (\mathrm{IV}.15)\ es\ cierta\ para\ \ D = A \cap Ran(u)\ \}.$$

Se probará que $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

$\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, es cierto por definición de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$**.**

Resta probar que $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$, para probar esta inclusión es suficiente demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona de $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Por demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona de $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

a) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Como $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

b) Si $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Sean $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_1(A_n \cap Ran(u)) = \int_{g^{-1}(A_n \cap Ran(u))} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

$$A_n \cap Ran(u) \subseteq A_{n+1} \cap Ran(u) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{y}$$

$A_n \cap Ran(u)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Ran(u)) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\boldsymbol{\chi_n}$ la función característica del conjunto

$$g^{-1}\big(A_n \cap Ran(u)\big).$$

Por las afirmaciones anteriores, por un resultado de teoría de la medida y por ser A_n un elemento de $\mathcal{F}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mu_1((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u)) &= \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap Ran(u))) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_1\left(A_n \cap Ran(u)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{g^{-1}\left(A_n \cap Ran(u)\right)} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0\,,\,s]} \left|\frac{dg}{dr}\right| \boldsymbol{\chi_n}(r) dr\,.\end{aligned}$$

Sea χ la función característica del conjunto $g^{-1}((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u))$.

Por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0\,,\,s]} \left|\frac{dg}{dr}\right| \boldsymbol{\chi_n}(r) dr &= \int_{[0\,,\,s]} \left|\frac{dg}{dr}\right| \boldsymbol{\chi}(r) dr \\ &= \int_{g^{-1}\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u)\right)} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr.\end{aligned}$$

Por las afirmaciones anteriores:

$$\mu_1\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u)\right) = \int_{g^{-1}\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap Ran(u)\right)} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr\,.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

c) Si $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

La prueba de c) es análoga a la de b).

d) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$

Sea $C \in \mathcal{A}$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $I_1 \in \mathcal{M}, I_2 \in \mathcal{M}, \ldots, I_n \in \mathcal{M}$ intervalos disjuntos dos a dos tales que

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} I_i.$$

Desde que I_i es un intervalo en $\mathbb{R}$ para todo i, $I_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo i. Y por ser

$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ un σ-álgebra de $\mathbb{R}$, el conjunto $C \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

Por el caso II, el conjunto $I_i \cap Ran(u)$ cumple la igualdad (IV.15) para todo i.

Luego

$$\mu_1(I_i \cap Ran(u)) = \int_{g^{-1}(I_i \cap Ran(u))} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr\,, \quad \text{para todo } i = 1,2,\ldots,n.$$

Desde que C es unión disjunta de los intervalos $I_1,\ldots,I_n$, se cumple:

$$\big(I_i \cap Ran(u)\big) \cap \big(I_j \cap Ran(u)\big) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j\,,$$

$$g^{-1}\big(I_i \cap Ran(u)\big) \cap g^{-1}\big(I_j \cap Ran(u)\big) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j\,,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\big(I_i \cap Ran(u)\big) = C \cap Ran(u) \quad \text{y}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} g^{-1}\big(I_i \cap Ran(u)\big) = g^{-1}(C \cap Ran(u)).$$

Por las igualdades anteriores:

$$\begin{aligned}\mu_1\big(C \cap Ran(u)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_1\big(I_i \cap Ran(u)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{g^{-1}(I_i \cap Ran(u))} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr\\ &= \int_{g^{-1}(C \cap Ran(u))} \left|\frac{dg}{dr}\right| dr\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $C \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

e) De a),b),c) y d) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona de $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Por demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$

Como $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una clase monótona en $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es la mínima clase monótona en $\mathbb{R}$ que incluye a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, entonces $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Se ha probado que $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$, por lo tanto $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.Y de esta igualdad se concluye que la relación (IV.15) se cumple para todo conjunto de Borel en el $Ran(u)$, con lo cual se prueba el presente lema. ■

Sea $C \subseteq \mathbb{R}$, se define el conjunto $-C = \{-x \;/\; x \in C\}$.

Lema IV.2.3. Se cumple:

i) Si B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$, entonces $-B$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$.

ii) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y B es un conjunto de Borel en A, entonces $-B$ es un conjunto de Borel en $-A$.

iii) Si B es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$, entonces $-B$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$ y $\mu_1(-B) = \mu_1(B)$.

Demostración.

i) Sea $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Se define el conjunto

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{ B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \ / \ -B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \}.$$

Es suficiente probar que $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ para probar i).

Por demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ **.**

Por definición de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$**,** se cumple $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$**.**

Resta probar que $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$, para probar esta inclusión es suficiente demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es un σ-álgebra de $\mathbb{R}$ que incluye a la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

A continuación, se probará que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es un σ-álgebra de $\mathbb{R}$ que incluye a la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

a) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$**.**

Como $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$**.**

b) $\mathbb{R} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Desde que $\mathbb{R} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $-\mathbb{R} = \mathbb{R}$, se tiene $\mathbb{R} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

c) Si $B \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, entonces $(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Sea $B \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, entonces $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $-B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

Como $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ es un σ-álgebra de $\mathbb{R}$, $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $-B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, entonces $(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R} \setminus (-B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

Desde que $-(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (-B)$ y $\mathbb{R} \setminus (-B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, se cumple

$$-(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

Luego por las afirmaciones anteriores:

$$(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \ \text{ y } \ -(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

Lo cual significa que $(\mathbb{R} \setminus B) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

d) Si $B_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Sean $B_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad -B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $-B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(-B_n) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

Como $-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-B_n)$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-B_n) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, entonces

$$-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

Se ha probado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad -\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}).$$

Es decir $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

e) Si A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, entonces $A \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, entonces $-A$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Luego por definición de $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, $A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $-A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Por lo tanto $A \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

f) De a), b),c),d) y e) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es un σ-álgebra de $\mathbb{R}$ que incluye a la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Desde que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es un σ-álgebra de $\mathbb{R}$ que incluye a la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, se cumple $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Se ha probado $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$, por lo tanto $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Y esta igualdad prueba i).

ii) Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y B conjunto de Borel en A, entonces existe C conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ tal que $B = C \cap A$. Luego por i) $-C$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$.

Desde que $-B = -(C \cap A) = (-C) \cap (-A)$ y $-C$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$, se cumple $-B$ es un conjunto de Borel en $-A$.

iii) Sea B un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Se define la función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, T es una homotecia de razón $\lambda = -1$.

Desde que B es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$ y T es una homotecia, se tiene $T(B) = -B$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$ y

$$\mu_1(-B) = \mu_1(T(B)) = |-1|\mu_1(B) = \mu_1(B). \quad \blacksquare$$

La generalización del siguiente resultado está demostrado en el artículo [6], ver proposición 2.1. Aquí mostramos los detalles de la prueba de la proposición 2.1 que no son explícitos, cuando en la proposición Ω es un conjunto abierto, conexo, acotado y no vacío.

Proposición IV.2.4. Existe una constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq C \ \frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u)^N} \tag{IV.17}$$

para todo conjunto abierto, conexo , acotado y no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, toda función Lipschitz no constante $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ en $\overline{\Omega}$ el cual se anula en $\partial\Omega$ y todo conjunto de Borel B en el $Ran(u)$.

Demostración.

Sean Ω, u y B como en la proposición.

La función u es continua, pues u es una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}$.

Por la proposición IV.1.10

$$Ran(u) = Ran(u^*) = [\, m \,, M \,] \text{ para algún } m \in \mathbb{R} \text{ y } M \in \mathbb{R}.$$

Como $Ran(u)$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ y B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$, entonces B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$.

Y desde que todo conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$, B es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Como u es una función medible Lebesgue (pues u es una función continua) y B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$, entonces $u^{-1}(B)$ es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Además $Lip(u) > 0$, pues u es una función Lipschitz no constante.

Primero se probará la desigualdad (IV.17) cuando Ω, u y B son como en la proposición y u es una función no negativa, después cuando Ω, u y B son como en la proposición y u es una función no positiva y por último cuando Ω, u y B son como en la proposición y u es una función que no es no negativa y no positiva.

Caso I. Si u es una función no negativa.

Por el teorema IV.1.11

$$\mu_N(u^{-1}(B)) = \mu_N((u^*)^{-1}(B)) \tag{IV.18}$$

Por el teorema IV.1.15 y la proposición IV.1.9 $u^*\colon \overline{\Omega}^* \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz y

$$0 < Lip(u^*) \leq Lip(u) \qquad \text{(IV.19)}$$

Sea s la longitud del radio de la bola cerrada $\overline{\Omega}^*$. Para cada $w \in \mathbb{R}^N$ con $\|w\| = 1$ se define la función $g_w : [0\ ,\ s] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_w(r) = u^*(rw)$ para todo $r \in [0\ ,\ s]$.
Por la proposición IV.1.7.(i) $g_{w_1} = g_{w_2}$ para todo $w_1 \in \mathbb{R}^N, w_2 \in \mathbb{R}^N$ cuyas normas son iguales a uno.
Por el lema IV.2.2 se cumple:

$$\mu_1(B) = \int_{(g_w)^{-1}(B)} \left|\frac{dg_w}{dr}\right| dr \qquad \text{(IV.20)}$$

para todo $w \in \mathbb{R}^N$ tal que $\|w\| = 1$.
La relación (IV.20) implica que para todo $w \in \mathbb{R}^N$ con $\|w\| = 1$,

$$\mu_1((g_w)^{-1}(B)) \geq \frac{\mu_1(B)}{Lip(u^*)} \geq 0 \qquad \text{(IV.21)}$$

Sea χ la función característica del conjunto $(u^*)^{-1}(B)$, se cumple

$$\mu_N\big((u^*)^{-1}(B)\big) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(y)\, dy.$$

Como $\chi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, entonces existe una medida finita σ definida en la esfera unidad $S^{N-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^N \,/\, \|x\| = 1 \,\}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi(y)\, dy = \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty r^{N-1}\, \chi(rw) dr \right) d\sigma(w).$$

Para todo $w \in S^{N-1}$, es inmediato verificar:

$$\{\, r \in [0, +\infty[\ / \ \chi(rw) = 1 \,\} = (g_w)^{-1}(B) \quad \text{y}$$

$$\{\, r \in [0, +\infty[\ / \ \chi(rw) = 0 \,\} = [0, +\infty[\ \setminus \ (g_w)^{-1}(B).$$

De las tres afirmaciones anteriores:

$$\mu_N\big((u^*)^{-1}(B)\big) = \int_{S^{N-1}} \left(\int_{(g_w)^{-1}(B)} r^{N-1} dr \right) d\sigma(w).$$

Debido a que las funciones g_w son iguales para cada $w \in \mathbb{R}^N$ con norma igual a 1, se cumple $\mu_1\big((g_w)^{-1}(B)\big) = \mu_1\big((g_v)^{-1}(B)\big)$ para todo $w \in \mathbb{R}^N$ y $v \in \mathbb{R}^N$ cuyas normas son iguales a 1. Luego $\mu_1\big((g_w)^{-1}(B)\big)$ es constante para todo $w \in \mathbb{R}^N$ cuya norma es 1.
Sean $p = \mu_1\big((g_w)^{-1}(B)\big)$ para todo $w \in \mathbb{R}^N$ con norma igual a 1 y A la bola cerrada de centro el origen y radio p.

De igual forma se prueba

$$\mu_N(A) = \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^p r^{N-1} dr \right) d\sigma(w).$$

Por el lema IV.2.1

$$\int_{(g_w)^{-1}(B)} r^{N-1} dr \geq \int_0^p r^{N-1} dr$$

para todo $w \in S^{N-1}$.

La desigualdad anterior implica

$$\mu_N\big((u^*)^{-1}(B)\big) \geq \mu_N(A) = \omega_N \big[\, \mu_1\big((g_w)^{-1}(B)\big)\,\big]^N \qquad \text{(IV.22)}$$

para todo $w \in S^{N-1}$.

Donde ω_N denota la N-medida de la bola cerrada de centro el origen y radio 1.

De las relaciones (IV.18), (IV.19), (IV.21) y (IV.22), se deduce

$$\begin{aligned} \mu_N\big(u^{-1}(B)\big) &= \mu_N\big((u^*)^{-1}(B)\big) \\ &\geq \omega_N \frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u^*)^N} \\ &\geq \omega_N \frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u)^N} . \end{aligned}$$

Luego se ha probado la desigualdad (IV.17) con $C = \omega_N > 0$.

<u>Caso II</u>. Si u es una función no positiva.

Sean $v(x) = -u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $-B = \{-x \ / \ x \in B\}$.

Como $v = -u$, u es una función Lipschitz no constante, no positiva y se anula en $\partial\Omega$, entonces $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz no constante, no negativa y se anula en $\partial\Omega$. Además $Lip(v) = Lip(u)$.

Se prueba mediante definición de rango e imagen inversa de una función que:

$$Ran(v) = -\,Ran(u) \ \text{ y } \ v^{-1}(-\,B) = u^{-1}(B).$$

Desde que B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$, $-\,B$ es un conjunto de Borel en $-\,Ran(u) = Ran(v)$ y $\mu_1(-B) = \mu_1(B)$.

Aplicando el caso I al conjunto Ω, a la función v y al conjunto $-\,B$, se obtiene:

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) = \mu_N\big(v^{-1}(-\,B)\big)$$
$$\geq \omega_N \frac{\mu_1(-\,B)^N}{Lip(v)^N}$$
$$= \omega_N \frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u)^N}\ .$$

Luego se ha probado la desigualdad (IV.17) con $C = \omega_N > 0$.

Caso III. Si u es una función que no es no negativa y no positiva (es decir existen $a \in \overline{\Omega}$ y $b \in \overline{\Omega}$ tales que $u(a) < 0 < u(b)$)

Sean $u^+(x) = max\{\,0\,, u(x)\,\}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y

$u^-(x) = -\,min\{\,0\,, u(x)\,\}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Se cumple:

$$u(x) = u^+(x) - u^-(x) \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}\,,$$
$$u^+(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad u^-(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Sean $B^+ = B \cap\,]0\,,\ +\infty[\ $, $B^- = B \cap\,]-\infty\,,\ 0[\ $ y $B^0 = B \cap \{0\}$.

De las definiciones de B^+, B^- y B^0 y de las propiedades de conjuntos, se deduce que el conjunto B es unión disjunta dos a dos de los conjuntos B^+, B^- y B^0.

De la afirmación anterior y de las propiedades de funciones se deduce que $u^{-1}(B)$ es unión disjunta dos a dos de los conjuntos $u^{-1}(B^+)$, $u^{-1}(B^-)$ y $u^{-1}(B^0)$.

Como B, $]0\,,\ +\infty[\,,\ ]-\infty\,,\ 0[$ y $\{0\}$ son conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$, entonces B^+, B^- y B^0 son conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$. Y por ser u una función medible Lebesgue, $u^{-1}(B^+)$, $u^{-1}(B^-)$ y $u^{-1}(B^0)$ son conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Desde que $u^{-1}(B)$ es unión disjunta dos a dos de los conjuntos medibles $u^{-1}(B^+)$, $u^{-1}(B^-)$ y $u^{-1}(B^0)$, se tiene

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq \mu_N\big(u^{-1}(B^+)\big) + \mu_N\big(u^{-1}(B^-)\big)$$

Utilizando las definiciones de u^+ , u^- , B^+ y $-\,(B^-)$ se prueba

$$u^{-1}(B^+) = (u^+)^{-1}(B^+) \quad \text{y}$$
$$u^{-1}(B^-) = (u^-)^{-1}(-\,(B^-))$$

Reemplazando las dos igualdades de arriba, en la desigualdad anterior se obtiene

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq \mu_N((u^+)^{-1}(B^+)) + \mu_N((u^-)^{-1}(-\,(B^-))) \qquad \text{(IV.23)}$$

A continuación se probará que $u^+ : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y $u^- : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Lipschitz, no constantes, no negativas que se anulan en $\partial\Omega$, B^+ y $-(B^-)$ son conjuntos de Borel en el $Ran(u^+)$ y $Ran(u^-)$ respectivamente. Para después aplicar el caso I a $\Omega,\ u^+,\ B^+$ y a $\Omega,\ u^-,\ -(B^-)$.

Desde que u es una función Lipschitz no constante, que no es no positiva y no negativa y se anula en $\partial\Omega$, se cumplen que $u^+ : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y $u^- : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones Lipschitz , no constantes que se anulan en $\partial\Omega$. Además $0 < Lip(u^+) \leq Lip(u)$ y $0 < Lip(u^-) \leq Lip(u)$.

Mediante las definiciones de $u^+,\ u^-$ y de rango de una función se prueba:

$$Ran(u) \cap \left]0\,,\ +\infty\right[\subseteq Ran(u^+) \quad \text{y}$$

$$Ran(u) \cap \left]-\infty\,, 0\right[\subseteq -Ran(u^-).$$

Y estas dos inclusiones implican:

$$(\,Ran(u) \cap \left]0\,,\ +\infty\right[\,) \cap Ran(u^+) = Ran(u) \cap \left]0\,,\ +\infty\right[\quad \text{y}$$

$$(\,Ran(u) \cap \left]-\infty\,, 0\right[\,) \cap (-Ran(u^-)) = Ran(u) \cap \left]-\infty\,, 0\right[.$$

Las dos igualdades anteriores, B conjunto de Borel en el $Ran(u)$ y $Ran(u)$ conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ implican que B^+ y B^- son conjuntos de Borel en el $Ran(u^+)$ y $-Ran(u^-)$ respectivamente.

Por el lema IV.2.3 $-(B^-)$ es un conjunto de Borel en el $Ran(u^-)$.

Como B es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces B^+, B^-, B^o son conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$. Además por el lema IV.2.3, $-(B^-)$ es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mu_1(-(B^-)) = \mu_1(B^-)$.

Aplicando el caso I a $\Omega,\ u^+,\ B^+$ y a $\Omega,\ u^-,\ -(B^-)$ se deduce:

$$\mu_N\big((u^+)^{-1}(B^+)\big) + \mu_N((u^-)^{-1}(-(B^-))) \geq \omega_N \left(\frac{\mu_1\big(B^+\big)^N + \mu_1\big(B^-\big)^N}{Lip(u)^N} \right) \qquad \text{(IV.24)}$$

De las desigualdades (IV.23) y (IV.24)

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq \frac{\omega_N}{Lip(u)^N}\ \big(\,\mu_1(B^+)^N + \mu_1(B^-)^N\,\big) \qquad \text{(IV.25)}$$

Como el conjunto B es unión disjunta dos a dos de los conjuntos medibles B^+, B^- y B^0 y B^0 es un conjunto de medida nula, entonces

$$\mu_1(B) = \mu_1(B^+) + \mu_1(B^-)$$

Aplicando la desigualdad dada en la proposición I.2.16.(i), cuando $a = \mu_1(B^+)$, $b = \mu_1(B^-)$ y $p = N$ se obtiene

$$\mu_1(B^+)^N + \mu_1(B^-)^N \geq 2^{1-N}\,\mu_1(B)^N$$

Luego de la desigualdad anterior y la desigualdad (IV.25) se tiene

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq C\,\frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u)^N}\ ,$$

donde $C = \omega_N(2^{1-N}) > 0$.

Por lo tanto se ha probado la desigualdad (IV.17). ■

CAPÍTULO V

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA DE DIRICHLET SEMILINEAL

En el presente capítulo se probará, bajo ciertas condiciones, la existencia de una solución débil de un problema de Dirichlet semilineal, para ello aplicaremos los resultados de los capítulos anteriores.

En la primera sección se enuncia el problema de Dirichlet semilineal, y se presentan las condiciones para la existencia de solución débil.

En la segunda sección se demuestra el teorema de existencia de solución débil del problema de Dirichlet semilineal.

En la tercera sección se dan algunos ejemplos de funciones f (ver problema (V.1)) que verifican las hipótesis del teorema de existencia de la solución débil del problema de Dirichlet semilineal.

V.1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES Y EL PROBLEMA DE DIRICHLET SEMILINEAL

Sean Ω un dominio (abierto y conexo) acotado en $\mathbb{R}^N$ de clase C^2,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

el operador de Laplace, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory y $h \in L^p(\Omega)$.

Consideramos el problema de Dirichlet semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x), & en\ \Omega\,, \\ \quad u = 0 & , \ sobre\ \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{V.1}$$

Se define la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \quad \text{para casi todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}\,.$$

A continuación definiremos cuando un subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene densidad positiva en $+\infty$ o $-\infty$.

Definición V.1.1. Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Decimos que E tiene densidad positiva en $+\infty$ si

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\mu_1(E\cap[0,r])}{\mu_1([0,r])} > 0.$$

Decimos que E tiene densidad positiva en $-\infty$ si

$$\liminf_{r\to-\infty} \frac{\mu_1(E\cap[r,0])}{\mu_1([r,0])} > 0.$$

Aquí μ_1 denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Si E tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$, entonces

$$0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{\mu_1(E\cap[0,r])}{\mu_1([0,r])} \le 1 \quad \text{y} \quad 0 < \liminf_{r\to-\infty} \frac{\mu_1(E\cap[r,0])}{\mu_1([r,0])} \le 1.$$

Sea λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea.

Ahora se presentan cuatro condiciones que se utilizarán en la siguiente sección. La primera condición es sobre el número real p, la segunda condición es sobre la función de Carathéodory f, la tercera condición es sobre la función F y la cuarta condición se expresa mediante la definición anterior.

Hipótesis I

$$p > \frac{2N}{N+2} \text{ si } N \ge 2\,, \quad p > 1 \text{ si } N = 1 \tag{V.2}$$

Hipótesis II

Existe una constante $A > 0$ y una función $B \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|f(x,s)| \le A|s| + B(x) \tag{V.3}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Hipótesis III

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \varepsilon s^2 + b_\varepsilon(x) \qquad (\mathrm{V.4})$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Hipótesis IV

Existen un conjunto medible Lebesgue $\Omega' \subseteq \Omega$ con $\mu_N(\Omega \setminus \Omega') = 0$ y $\eta > 0$ tales que

$$E(\Omega', \lambda_1 - \eta) = \bigcap_{x \in \Omega'} \left\{ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\} \qquad (\mathrm{V.5})$$

tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$.

Definición V.1.2. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, supongamos que p satisface la condición (V.2), la función f satisface la condición (V.3) y $h \in L^p(\Omega)$. Una *solución débil* del problema de Dirichlet semilineal (V.1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la ecuación:

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v + \int_\Omega hv \quad \text{para todo} \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (\mathrm{V.6})$$

Las condiciones presentadas anteriormente garantizan la existencia de la solución débil del problema de Dirichlet semilineal (V.1). En la siguiente sección se probará que, sí p satisface la condición (V.2), la función de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la condición (V.3), la función F satisface la condición (V.4) y se satisface la condición (V.5), entonces el problema de Dirichlet semilineal (V.1) tiene solución débil para todo $h \in L^p(\Omega)$.

V.2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE DIRICHLET SEMILINEAL

Antes de probar el teorema de existencia de la solución débil del problema de Dirichlet semilineal se demostrará una proposición que se utilizará en la demostración del teorema.

Proposición V.2.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ conjunto medible Lebesgue de medida finita, $\{\Omega_m\}$ sucesión de conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ incluidos en Ω y χ_m es la función característica del conjunto Ω_m para cada $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que

i) Existen $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\mu_N(\Omega_m) > \delta$, para todo $m \geq n_0$.

ii) La función $v : \Omega \to \mathbb{R} \in L^2(\Omega)$ y $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} v^2(x)\chi_m(x)dx > \frac{\varepsilon\,\delta}{2} \;,$$

para todo $m \geq n_0$.

En consecuencia

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega} v^2(x)\chi_m(x)dx > 0.$$

Demostración.

Por demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu_N\{\, x \in \Omega \;/\; v^2(x) < \varepsilon \,\} < \frac{\delta}{2}$$

Supongamos lo contrario, para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu_N\{\, x \in \Omega \;/\; v^2(x) < \varepsilon \,\} \geq \frac{\delta}{2}$$

Luego para cada $k \in \mathbb{N}$ $(\varepsilon = \frac{1}{k})$

$$\mu_N\left\{ x \in \Omega \;/\; v^2(x) < \frac{1}{k} \right\} \geq \frac{\delta}{2}\;.$$

Sean $A_k = \left\{ x \in \Omega \;/\; v^2(x) < \frac{1}{k} \right\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.Luego

$$A = \{\, x \in \Omega \;/\; v^2(x) = 0 \;\} = \emptyset\;.$$

Como $A_{k+1} \subseteq A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, A_k es un conjunto medible Lebesgue para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\mu_N(A_1) \leq \mu_N(\Omega) < +\infty$, entonces

$$0 = \mu_N(\emptyset) = \mu_N(A) = \lim_{k\to\infty}(A_k) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Lo cual es absurdo, luego se cumple que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu_N\{\, x \in \Omega \;/\; v^2(x) < \varepsilon \,\} < \frac{\delta}{2}\;.$$

La función $v^2\chi_m \in L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pues $v \in L^2(\Omega)$ y $0 \leq \chi_m \leq 1$ en Ω, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sea $B_\varepsilon = \{\, x \in \Omega \ / \ v^2(x) < \varepsilon \,\}$, entonces $\Omega \setminus B_\varepsilon = \{\, x \in \Omega \ / \ v^2(x) \geq \varepsilon \,\}$.

De las definiciones de χ_m , B_ε y de $v^2 > 0$ en Ω, se deduce

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x)\chi_m(x)dx = \int\limits_{\Omega_m} v^2(x)dx \geq \int\limits_{\Omega_m \setminus B_\varepsilon} v^2(x)\, dx \geq \varepsilon\, \mu_N(\Omega_m \setminus B_\varepsilon),$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como $\Omega_m \subseteq (\Omega_m \setminus B_\varepsilon) \cup B_\varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $(\Omega_m \setminus B_\varepsilon) \cap B_\varepsilon = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$, Ω_m es un conjunto medible Lebesgue para todo $m \in \mathbb{N}$ y B_ε es un conjunto medible Lebesgue de medida finita, entonces

$$\mu_N(\Omega_m \setminus B_\varepsilon) \geq \mu_N(\Omega_m) - \mu_N(B_\varepsilon), \quad \text{para todo } \ m \in \mathbb{N}.$$

La desigualdad anterior, $\mu_N(B_\varepsilon) < \dfrac{\delta}{2}$ y la hipótesis i) implican

$$\mu_N(\Omega_m \setminus B_\varepsilon) > \frac{\delta}{2} \quad \text{para todo } \ m \geq n_0.$$

Luego, por las desigualdades anteriores:

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x)\chi_m(x)dx > \frac{\varepsilon\, \delta}{2} \ ,$$

para todo $m \geq n_0$.

Esta desigualdad implica

$$\liminf_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega} v^2(x)\chi_m(x)dx \geq \frac{\varepsilon\, \delta}{2} > 0. \ \blacksquare$$

El siguiente teorema se puede encontrar en el artículo [6]. A continuación, siguiendo [6], demostraremos detalladamente el teorema e incluimos una modificación que es producto de usar la proposición V.2.1 en vez de la propiedad de continuación única para el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea.

Teorema V.2.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2. Si p satisface la condición (V.2), $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que satisface la condición (V.3), la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones (V.4) y (V.5). Entonces, para todo $h \in L^p(\Omega)$, existe una función $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ que es solución débil de (V.1). Esta solución minimiza el funcional asociado $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) - \int_\Omega h\,u \ ,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración.

Se usarán el teorema II.1.8 y la proposición II.2.8 para probar que Φ tiene mínimo en $H_0^1(\Omega)$ y este mínimo es solución débil de (V.1). Por último usando los teoremas I.3.11 y I.3.12 y el corolario III.1.6 se prueba que la solución débil de (V.1) pertenece a $W^{2,p}(\Omega)$.

Dado $h \in L^p(\Omega)$.

Se probará que cada una de las tres integrales en la definición de Φ son números reales para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, para lo cual se demostrará que $|\nabla u|^2$, $F(x,u)$ y hu pertenecen a $L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Por la desigualdad de Hölder $|\nabla u|^2 = \nabla u . \nabla u \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Por el teorema III.2.3 $F(x,u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Como p satisface la condición (V.2) y Ω es un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$, entonces $H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ es una inmersión continua (p' es el exponente conjugado de p), luego por la desigualdad de Hölder $hu \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto cada una de las tres integrales que definen a Φ son números reales para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Desde que cada una de las tres integrales que definen a Φ son números reales para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, se cumple que Φ es una función de $H_0^1(\Omega)$ en $\mathbb{R}$.

Se definen $\Phi_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\Phi_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $\Phi_3 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \ , para\ todo\ \ u \in H_0^1(\Omega),$$

$$\Phi_2(u) = -\int_\Omega F(x,u) \ \ , para\ todo\ \ u \in H_0^1(\Omega) \ \ y$$

$$\Phi_3(u) = -\int_\Omega hu \ \ , para\ todo\ \ u \in H_0^1(\Omega) \, .$$

Se verifica que $\Phi(u) = \Phi_1(u) + \Phi_2(u) + \Phi_3(u)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

La prueba del presente teorema se dividira en varios pasos.

Paso 1. Demostraremos que la función $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.).

Es suficiente probar que Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 son secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente para demostrar que Φ es s.s.c.i.d.

A continuación se probará que Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 son secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente.

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ y una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por la proposición II.1.2, la sucesión $\left\{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\right\}$ es acotada y

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Phi_1(u_n) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_1(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi_1(u_n).$$

Es decir Φ_1 es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.).

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ y una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por un resultado de límite inferior de una sucesión, existe una subsucesión $\left\{\Phi_2(u_{n_k})\right\}$ de $\{\Phi_2(u_n)\}$ (y por lo tanto $\{u_{n_k}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$) tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_2(u_n) = \lim_{k\to\infty} \Phi_2(u_{n_k}).$$

Por el teorema I.3.10

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^2(\Omega) \text{ es una inmersión compacta.}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ y $\{u_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{u_n\}$, entonces $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, luego por el teorema II.1.10

$$u_{n_k} \to u \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Por el teorema I.2.10 existen $\varphi \in L^2(\Omega)$ y una subsucesión $\{v_m\}$ de $\{u_{n_k}\}$ (y por lo tanto $\{v_m\}$ subsucesión de $\{u_n\}$) tales que

$$\lim_{m\to\infty} v_m(x) = u(x) \qquad c.t.\ \ x \in \Omega \tag{V.7}$$

$$\text{y} \quad |v_m(x)| \le \varphi(x) \ \text{ para todo } \ m \in \mathbb{N}, \ \ c.t.\ \ x \in \Omega \tag{V.8}$$

De la condición (V.4), dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $b_1 \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x, v_m(x)) \le \frac{\lambda_1}{2}\left(v_m(x)\right)^2 + \left(v_m(x)\right)^2 + b_1(x) \tag{V.9}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, para casi todo $x \in \Omega$.

Por el lema de Fatou (lema I.2.3):

$$\int_\Omega \left(\liminf_{m\to\infty} (-F(x, v_m(x))\right) \le \liminf_{m\to\infty} -\int_\Omega F(x, v_m(x)) \tag{V.10}$$

Las hipótesis del lema de Fatou se verifican de la siguiente forma:

Las relaciones (V.8) y (V.9) implican que existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, $-F(x, v_m(x)) \ge g(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y por el teorema III.2.3 $-F(x, v_m(x)) \in L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como f es una función de Carathéodory, entonces (por el lema III.2.2) F es una función de Carathéodory, luego

$$\begin{aligned}\liminf_{m\to\infty} (-F(x, v_m(x)) &= \lim_{m\to\infty} (-F(x, v_m(x)) \\ &= -F(x, u(x)) \quad c.t.\ \ x \in \Omega \end{aligned} \tag{V.11}$$

Reemplazando (V.11) en (V.10) se obtiene

$$\Phi_2(u) = -\int_\Omega F(x, u) \le \liminf_{m\to\infty} -\int_\Omega F(x, v_m(x)) = \liminf_{m\to\infty} \Phi_2(v_m).$$

Desde que el límite inferior de la sucesión $\{\Phi_2(u_n)\}$ es igual al límite de la sucesión $\{\Phi_2(u_{n_k})\}$ y $\{\Phi_2(v_m)\}$ es una subsucesión de $\{\Phi_2(u_{n_k})\}$, se cumple

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_2(u_n) = \lim_{k\to\infty} \Phi_2(u_{n_k}) = \lim_{m\to\infty} \Phi_2(v_m) = \liminf_{m\to\infty} \Phi_2(v_m).$$

De las dos afirmaciones anteriores se concluye:

$$\Phi_2(u) \le \liminf_{n\to\infty} \Phi_2(u_n).$$

Por lo tanto Φ_2 es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.).

Es suficiente probar que $\Phi_3 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua para demostrar que Φ_3 es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente.

La condición (V.2) y Ω conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^N$ implican que

$$H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \text{ es una inmersión continua} \qquad (\text{V}.12)$$

(p' es el exponente conjugado de p).

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$. Por (V.12) y por la desigualdad de Hölder $hu \in L^1(\Omega)$ y $hv \in L^1(\Omega)$, luego $\alpha(hu) + \beta(hv) \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega h(\alpha u + \beta v) = \int_\Omega \alpha(hu) + \beta(hv) = \alpha\left(\int_\Omega hu\right) + \beta\left(\int_\Omega hv\right).$$

Esta igualdad implica que $\Phi_3(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi_3(u) + \beta\Phi_3(v)$.

Por lo tanto Φ_3 es lineal.

Sean $u \in H_0^1(\Omega)$ y una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por la relación (V.12) y la desigualdad de Hölder :

$$u_n \to u \text{ en } L^{p'}(\Omega) \text{ y } |\Phi_3(u_n) - \Phi_3(u)| \le \|h\|_{L^p(\Omega)}\|u_n - u\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las dos afirmaciones de arriba implican que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_3(u_n) = \Phi_3(u).$$

Por lo tanto Φ_3 es continuo.

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ y una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Como $\Phi_3 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo y $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_3(u_n) = \Phi_3(u).$$

Luego

$$\Phi_3(u) = \liminf_{n\to\infty} \Phi_3(u_n).$$

Por lo tanto Φ_3 es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.).

Se ha probado que Φ_1, Φ_2 y Φ_3 son secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente, luego por la proposición II.1.5 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.).

Paso 2. Demostraremos que la función $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es coerciva.

Se probará por contradicción. Supongamos que Φ no es cercivo, entonces existe una sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$ y una constante $c > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} > 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = +\infty \quad \text{y}$$

$$\Phi(u_n) \le c \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{V.13}$$

Paso 2.1. Sea $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existen una subsucesión $\{v_{n_m}\}$ de $\{v_n\}$, $v \in H_0^1(\Omega)$, $g_1 \in L^2(\Omega)$ y $g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ tales que

$$v_{n_m} \rightharpoonup v \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \tag{V.14}$$

$$v_{n_m} \to v \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \tag{V.15}$$

$$v_{n_m} \to v \quad \text{en} \quad L^{p'}(\Omega) \tag{V.16}$$

$$\lim_{m\to\infty} v_{n_m}(x) = v(x) \quad c.t. \;\; x \in \Omega \tag{V.17}$$

$$|v_{n_m}(x)| \le g_1(x) \quad \text{para todo} \;\; m \in \mathbb{N} \;\; \text{y} \;\; c.t. \;\; x \in \Omega \tag{V.18}$$

$$|v_{n_m}(x)| \le g_2(x) \quad \text{para todo} \;\; m \in \mathbb{N} \;\; \text{y} \;\; c.t. \;\; x \in \Omega \tag{V.19}$$

De la definición de v_n se tiene que, $v_n \in H_0^1(\Omega)$ y $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio reflexivo y la sucesión $\{v_n\}$ es acotada en $H_0^1(\Omega)$, entonces (por el Teorema I.1.16) existen una subsucesión $\{x_k\}$ de $\{v_n\}$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$x_k \rightharpoonup v \quad \text{en} \;\; H_0^1(\Omega).$$

Por el teorema I.3.10

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega) \text{ es un inmersión compacta.}$$

Desde que p satisface la condición (V.2) y Ω es un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^N$, se cumple

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^{p'}(\Omega)$$

es una inmersión continua y compacta (p' es el exponente conjugado de p).

La sucesión $\{x_k\}$ converge débilmente a v en $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^{p'}(\Omega)$ son inmersiones compactas, aplicando el teorema II.1.10 se tiene

$$x_k \to v \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \text{ y}$$

$$x_k \to v \quad \text{en} \quad L^{p'}(\Omega).$$

Luego por el teorema I.2.10 existen una subsucesión $\{w_m\}$ de $\{x_k\}$ (y por lo tanto $\{w_m\}$ subsucesión de $\{v_n\}$) $g_1 \in L^2(\Omega)$ y $g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ tales que

$$\lim_{m\to\infty} w_m(x) = v(x) \quad c.t. \;\; x \in \Omega,$$

$$|w_m(x)| \le g_1(x) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y } c.t. \;\; x \in \Omega \text{ y}$$

$$|w_m(x)| \le g_2(x) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y } c.t. \;\; x \in \Omega.$$

Como $\{w_m\}$ es una subsucesión de $\{v_n\}$, existe $\{n_m\}$ sucesión en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$w_m = v_{n_m} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego existen $\{v_{n_m}\}$ subsucesión de $\{v_n\}$, $v \in H_0^1(\Omega)$, $g_1 \in L^2(\Omega)$ y $g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ que satisfacen las condiciones pedidas.

Paso 2.2. Demostraremos que v es una función propia asociada al valor propio λ_1 (es el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet homogénea).

Por el teorema I.4.4, para demostrar que v es una función propia asociada al valor propio λ_1, es suficiente probar que:

$$v \in H_0^1(\Omega),$$

$$v \not\equiv 0 \text{ y}$$

$$\lambda_1 (\int_\Omega v^2) = \int_\Omega \nabla v . \nabla v \;.$$

Por el paso anterior $v \in H_0^1(\Omega)$. Ahora se probará que $v \not\equiv 0$.
Del paso (2.1):

$$v_{n_m} = \frac{u_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por la desigualdad (V.13)

$$\Phi(u_{n_m}) \leq c \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$ a la desigualdad de arriba se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_{n_m}|^2 - \int_\Omega \frac{F(x,u_{n_m})}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} - \int_\Omega \frac{hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \frac{c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \qquad (\text{V}.20)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

De la desigualdad anterior y la condición (V.4) se deduce que:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_{n_m}|^2 - \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)\int_\Omega (v_{n_m})^2 - \int_\Omega \frac{b_\varepsilon}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} - \int_\Omega \frac{hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \frac{c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. (V.21)

Dado $\varepsilon > 0$, por la desigualdad (V.21), existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_{n_m}|^2 - \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)\int_\Omega (v_{n_m})^2 - \int_\Omega \frac{b_\varepsilon}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} - \int_\Omega \frac{hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \frac{c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Hallando los límites de cada uno de los términos de la desigualdad de arriba, cuando $m \to \infty$.

- Como $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ y $\{u_{n_m}\}$ es una subsucesión de $\{u_n\}$, entonces $\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

- Desde que $H_0^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ es una inmersión continua y $\{v_{n_m}\}$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ ($\|v_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$), se cumple que $\{v_{n_m}\}$

es una sucesión en $L^{p'}(\Omega)$ y existe una constante $k > 0$ (independiente de m) tal que

$$\|v_{n_m}\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq k \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego por la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_\Omega \frac{h v_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \right| \leq \frac{k\|h\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

La desigualdad de arriba y $\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$ cuando $m \to \infty$ implican

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{h v_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

- Afirmamos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{b_\varepsilon}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0,$$

pues

$$\left| \int_\Omega \frac{b_\varepsilon}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \right| \leq \frac{\|b_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$ cuando $m \to \infty$.

- La relación (V.15) implica que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (v_{n_m})^2 = \lim_{m\to\infty} \|v_{n_m}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega v^2.$$

- Por definición de v_n (ver **paso 2.1.**)

$$v_{n_m} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \|v_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} = 1 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_{n_m}|^2 = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla v_{n_m} . \nabla v_{n_m} = \lim_{m\to\infty} \|v_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 1.$$

De lo calculado anteriormente, el límite del miembro izquierdo de la desigualdad (V.21) cuando $m \to \infty$ es

$$\frac{1}{2}(1) - \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right) \int_{\Omega} v^2$$

y el límite del miembro derecho de la desigualdad (V.21) cuando $m \to \infty$ es 0.

Por la desigualdad (V.21) y la afirmación anterior se tiene

Para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2}(1) - \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right) \int_{\Omega} v^2 \leq 0,$$

lo cual implica (tomando límite a la desigualdad de arriba cuando $\varepsilon \to 0^+$)

$$\lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 1 \leq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 \qquad (V.22)$$

Luego

$$\int_{\Omega} v^2 > 0.$$

Por lo tanto $v \not\equiv 0$.

Resta probar que

$$\lambda_1 \left(\int_{\Omega} v^2\right) = \int_{\Omega} \nabla v . \nabla v \; .$$

Por la relación (V.22)

$$\lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 1 \leq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2$$

Por definición de v_n (ver **paso 2.1.**)

$$v_{n_m} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)} = 1 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)} = 1.$$

Por la proposición II.1.2 y la relación (V.14)

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \; ,$$

el cual implica

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Luego se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty} \left\|v_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 ,$$

por lo tanto

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 .$$

Por el teorema I.4.3

$$\lambda_1 \int_{\Omega} v^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Luego de ambas desigualdades

$$\lambda_1 \int_{\Omega} v^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

De las afirmaciones anteriores se concluye que v es una función propia asociada al valor propio λ_1.

Paso 2.3. Demostraremos que

$$\lim_{m\to\infty} \sup \int_{\Omega} \left(\lambda_1 \left(v_{n_m}\right)^2 - \frac{2F(x, u_{n_m})}{\left\|u_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \right) \leq 0.$$

Por el teorema I.4.3

$$\frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} \left(v_{n_m}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left|\nabla v_{n_m}\right|^2 \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

De la desigualdad anterior y la desigualdad (V.20) se deduce

$$\lambda_1 \int_{\Omega} \left(v_{n_m}\right)^2 - \int_{\Omega} \frac{2F(x, u_{n_m})}{\left\|u_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \leq \int_{\Omega} \frac{2h v_{n_m}}{\left\|u_{n_m}\right\|_{H_0^1(\Omega)}} + \frac{2c}{\left\|u_{n_m}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Tomando límite superior a cada miembro de la desigualdad de arriba, cuando $m \to \infty$ se obtiene

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 (v_{n_m})^2 - \frac{2F(x,u_{n_m})}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \right) \leq \limsup_{m\to\infty} \left[\left(\int_\Omega \frac{2hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) + \frac{2c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \right]$$

Como

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} = \lim_{m\to\infty} \frac{c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} = 0,$$

(ver **paso 2.2.**) entonces

$$\limsup_{m\to\infty} \left[\left(\int_\Omega \frac{2hv_{n_m}}{\|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) + \frac{2c}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \right] = 0.$$

Por lo tanto

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 (v_{n_m})^2 - \frac{2F(x,u_{n_m})}{\|u_{n_m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \right) \leq 0.$$

Paso 2.4. Sea $t_m = \|u_{n_m}\|_{H_0^1(\Omega)} > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2} \right) \leq 0 \qquad (V.23)$$

Como $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $u_{n_m} = t_m v_{n_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Expresando la integral de la relación (V.23) como suma de integrales.

$$\int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2} \right) = \int_\Omega \lambda_1 \left(v^2 - (v_{n_m})^2 \right) +$$

$$+ \int_\Omega \left(\lambda_1 (v_{n_m})^2 - \frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} \right) +$$

$$+ \int_\Omega \left(\frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2} \right)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Cada una de las integrales en la igualdad de arriba son finitas, pues $v_{n_m} \in H_0^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $v \in H_0^1(\Omega)$ y $F(x,u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

El límite superior del lado izquierdo de la igualdad anterior, cuando $m \to \infty$ es igual al límite superior del lado derecho de la misma igualdad, cuando $m \to \infty$. Luego por la relación (V.15) y un resultado de límite superior de una sucesión se deduce

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right) \leq \limsup_{m\to\infty} \left[\int_\Omega \left(\lambda_1 \left(v_{n_m}\right)^2 - \frac{2F\left(x,t_m v_{n_m}\right)}{{t_m}^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \left(\frac{2F\left(x,t_m v_{n_m}\right)}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right)\right] \qquad (\mathrm{V}.24)$$

Se probará

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right) = 0.$$

Por el teorema del valor medio, para todo $m \in \mathbb{N}$, para $c.t.$ $x \in \Omega$, existe

$\theta = \theta(m,x) \in \,]0\,,1[$ tal que

$$\frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2} = \frac{2}{t_m}\, f(x,t_m v + \theta(t_m v - t_m v_{n_m}))(v_{n_m} - v)$$

Luego para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $\theta = \theta(m,x) \in \,]0\,,1[$ tal que

$$\int_\Omega \left(\frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right) = \int_\Omega \frac{2}{t_m}\, f(x,t_m v + \theta(t_m v - t_m v_{n_m}))(v_{n_m} - v)$$

A continuación se aplica el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para probar que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{2F(x,t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right) = 0.$$

Las hipótesis del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se verifican de la siguiente forma:

Utilizando la condición (V.3), la relación (V.17) y $t_m \to +\infty$ cuando $m \to \infty$ se prueba

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2}{t_m} f(x, t_m v + \theta(t_m v - t_m v_{n_m}))(v_{n_m} - v) = 0$$

para $c.t.$ $x \in \Omega$.

Utilizando la condición (V.3), las relaciones (V.18) y (V.19), la condición (V.2) sobre p y $t_m \to +\infty$ cuando $m \to \infty$ se prueba que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{2}{t_m} f(x, t_m v + \theta(t_m v - t_m v_{n_m}))(v_{n_m} - v)\right| \leq g(x)$$

para $c.t.$ $x \in \Omega$.

Por el teorema III.2.3

$$\frac{2F(x, t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2} \in L^1(\Omega)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{2F(x, t_m v_{n_m})}{{t_m}^2} - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2}\right) = 0.$$

La desigualdad (V.24) y la igualdad anterior implican que

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2}\right) \leq \limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 (v_{n_m})^2 - \frac{2F(x, t_m v_{n_m})}{{t_m}^2}\right)$$

Luego por el **paso (2.3)**

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2}\right) \leq 0.$$

Paso 2.5. Sea $\eta > 0$ como en la condición (V.5). Existen $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_N\left\{x \in \Omega \;/\; \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2\ v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta\right\} > \delta \qquad (V.25)$$

para todo $m \geq n_0$.

Desde que v es una función propia correspondiente a λ_1, se tiene que $v > 0$ en Ω o $v < 0$ en Ω. Se probará la desigualdad (V.25) cuando $v > 0$ en Ω. Cuando

$v < 0$ en Ω, la desigualdad (V.25) se prueba similarmente al primer caso, usando la parte de la suposición (V.5) relativa a la densidad positiva en $-\infty$.

Si $v > 0$ en Ω.

El conjunto

$$\left\{ x \in \Omega \,/\, \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2 \ v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\}$$

es medible Lebesgue para todo $m \in \mathbb{N}$, pues $v \in H_0^1(\Omega)$ y $F(x, u(x)) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sea

$$A = \{ x \in \Omega \,/\, s \mapsto f(x, s) \ es \ continuo \ en \ \mathbb{R} \}.$$

Por ser f una función de Carathéodory, A es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ incluido en Ω con $\mu_N(\Omega \setminus A) = 0$. Luego por el lema III.2.2 la función $F: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory, en particular para cada $x \in A$ fijo la función $s \mapsto F(x, s)$ es continua en $\mathbb{R}$.

De la condición (V.5) ($E(\Omega', \lambda_1 - \eta)$ tiene densidad positiva en $+\infty$) y de que para cada $x \in A$ fijo la función $s \mapsto F(x, s)$ es continuo en $\mathbb{R}$, se deduce que existen Ω' conjunto medible Lebesgue incluido en Ω con $\mu_N(\Omega \setminus \Omega') = 0$ y $\eta > 0$ tales que $\Omega' \cap A$ es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ incluido en Ω no vacío con $\mu_N(\Omega \setminus (\Omega' \cap A)) = 0$,

$$E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) = \bigcap_{x \in (\Omega' \cap A)} \left\{ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (por ende un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ y un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$) y

$$1 \geq \liminf_{r \to +\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [0, r])}{\mu_1([0, r])} > 0.$$

Del **paso 2.2** se sabe que v es una función propia asociada al valor propio λ_1, por el teorema I.4.7 v y su extensión continua en $\overline{\Omega}$ (al cual denotamos por $\tilde{v}$) son funciones Lipschitz no constantes en Ω y $\overline{\Omega}$ respectivamente. Además la función $\tilde{v} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ se anula en $\partial\Omega$.

Como $t_m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\tilde{v}$ es una función Lipschitz no constante en $\overline{\Omega}$ que se anula en $\partial\Omega$, entonces $t_m \tilde{v}$ es una función Lipschitz no constante en $\overline{\Omega}$ que se anula en $\partial\Omega$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Desde que $t_m\tilde{v}$ es una función continua no negativa en el conjunto conexo y compacto $\overline{\Omega}$ y $\tilde{v} > 0$ en Ω, se cumple $Ran(t_m\tilde{v}) = [0\,,\, t_m\, max\, \tilde{v}\,]$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $max\, \tilde{v} = max\, v > 0$.

Sea $B_m = E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [0\,,\, t_m\, max\, \tilde{v}\,]$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Desde que $E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta)$ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$, se cumple que $B_m = E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [0\,,\, t_m\, max\, \tilde{v}\,]$ es un conjunto de Borel en el $Ran(t_m\tilde{v})$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Se ha probado que $t_m\tilde{v}$ es una función de Lipschitz no constante en $\overline{\Omega}$ que se anula en $\partial\Omega$ y B_m es un conjunto de Borel en el $Ran(t_m\tilde{v})$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Aplicando la proposición IV.2.4 al conjunto abierto conexo acotado Ω, a la función $t_m\tilde{v}$ y al conjunto B_m para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\mu_N\{\, x \in \overline{\Omega}\ /\ t_m\tilde{v}(x) \in B_m\,\} \geq C\ \frac{\mu_1(B_m)^N}{Lip(t_m\tilde{v})^N} \qquad (V.26)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Desde que $0 \notin E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta)$ (por ende $0 \notin B_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$), $\tilde{v}$ se anula en $\partial\Omega$, $\mu_N(\Omega \setminus (\Omega' \cap A)) = 0$, $\tilde{v}$ es una extensión continua de v en $\overline{\Omega}$ y A y Ω' son subconjuntos de Ω, se cumple

$$\mu_N\{\, x \in \overline{\Omega}\ /\ t_m\tilde{v}(x) \in B_m\,\} = \mu_N\{\, x \in (\Omega' \cap A)\ /\ t_m v(x) \in B_m\,\}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como $Lip(\tilde{v}) = Lip(v)$ y $t_m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$Lip(t_m\tilde{v}) = t_m Lip(\tilde{v}) = t_m Lip(v) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Reemplazando las dos igualdades anteriores en la desigualdad (V.26) se obtiene

$$\mu_N\{\, x \in (\Omega' \cap A)\ /\ t_m v(x) \in B_m\,\} \geq C\ \frac{\mu_1(B_m)^N}{{t_m}^N\ Lip(v)^N} \qquad (V.27)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

De la definición de B_m

$$\{\, x \in (\Omega' \cap A)\ /\ t_m v(x) \in B_m\,\} \subseteq \left\{ x \in \Omega\ /\ \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2\ v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

De la inclusión anterior y de la desigualdad (V.27) se deduce

$$\mu_N\left\{x \in \Omega \,/\; \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2 \; v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta\right\} \geq C\; \frac{\mu_1(B_m)^N}{{t_m}^N\, Lip(v)^N} \tag{V.28}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sea

$$L = \liminf_{r\to+\infty} \; \frac{\mu_1(E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [0, r])}{\mu_1([0, r])} \in \,]0\,,1].$$

Como

$$\liminf_{r\to+\infty} \; \frac{\mu_1(E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [0, r])}{\mu_1([0, r])} > \frac{L}{2}$$

y $t_m(\max(v)) \to +\infty$ cuando $m \to \infty$, entonces existe $n_0 = n_0(L, v) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_1(B_m) > \frac{L}{2}(t_m)(\max(v)) \tag{V.29}$$

para todo $m \geq n_0$.

De las desigualdades (V.28) y (V.29) se deduce

$$\mu_N\left\{x \in \Omega \,/\; \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2 \; v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta\right\} > \delta$$

para todo $m \geq n_0$.

Donde

$$\delta = C\left(\frac{L}{2}\right)^N \frac{\max(v)^N}{Lip(v)^N} > 0.$$

Si $v < 0$ en Ω.

Cuando $v < 0$ en Ω se prueba que existe $n_0 = n_0(L, v) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_N\left\{x \in \Omega \,/\; \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2 \; v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta\right\} > C\left(\frac{L}{2}\right)^N \frac{(-\min(v))^N}{Lip(v)^N} > 0$$

para todo $m \geq n_0$.

Donde

$$L = \liminf_{r \to -\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega' \cap A, \lambda_1 - \eta) \cap [r,0])}{\mu_1([r,0])} \in]0\,,1]$$

y $C = C(N) > 0$ es la constante que se obtiene al aplicar la proposición IV.2.4.

Paso 2.6. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea χ_m la función característica del conjunto

$$\Omega_m = \left\{ x \in \Omega \,/\, \frac{2F(x, t_m v(x))}{{t_m}^2 \; v(x)^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\}$$

Es decir $\chi_m(x) = 1$ si $x \in \Omega_m$ y $\chi_m(x) = 0$ si $x \in (\Omega \setminus \Omega_m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Se cumple

$$\liminf_{m \to \infty} \int_{\Omega} v^2 \, \chi_m = 0.$$

Por el teorema III.2.3. $F\big(x, t_m v(x)\big) \in L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ y $F\big(x, t_m v(x)\big) \in L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2} = \left(\lambda_1 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2 \; v^2}\right) v^2 \in L^1(\Omega)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

En el paso anterior se probó que el conjunto Ω_m es medible Lebesgue para todo $m \in \mathbb{N}$.

Del **paso (2.4)** se tiene

$$\limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega} \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2}\right) \leq 0$$

Luego

$$\liminf_{m \to \infty} \int_{\Omega} \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2}\right) \leq 0 \qquad (\mathrm{V}.30)$$

A continuación se va expresar la integral de la desigualdad (V.30) como suma de dos integrales de Lebesgue finitas.

$$\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2} = \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 \chi_m + \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 (1-\chi_m)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \Omega$. (V.31)

El primer y segundo sumando de la igualdad (V.31) pertenecen a $L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pues el miembro del lado izquierdo de la igualdad (V.31) pertenece a $L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $0 \le \chi_m \le 1$ en Ω, para todo $m \in \mathbb{N}$.

En (V.31) cada uno de los sumandos están en $L^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \left(\lambda_1 v^2 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2}\right) = \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 \chi_m \; +$$

$$+ \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 (1-\chi_m) \qquad (V.32)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ahora se probará

$$\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 \chi_m \ge \eta \left(\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega v^2 \chi_m\right) \ge 0 \qquad (V.33)$$

y

$$\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 (1-\chi_m) \ge 0 \qquad (V.34)$$

La función $v^2 \chi_m \in L^1(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pues $v \in H_0^1(\Omega)$ y $0 \le \chi_m \le 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \Omega$.

De las definiciones de Ω_m y χ_m se deduce

$$\eta v^2 \chi_m \le \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 \chi_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \Omega$.

La desigualdad de arriba implica

$$0 \le \eta \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega v^2 \chi_m \le \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x,t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2 \chi_m$$

De la condición (V.4) se deduce:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\lambda_1 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2\ v^2}\right) v^2(1-\chi_m) \geq \left(-2\varepsilon - \frac{2b_\varepsilon(x)}{{t_m}^2\ v^2}\right) v^2(1-\chi_m)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y para $c.t.$ $x \in \Omega$.

También se cumple, para todo $\varepsilon > 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \Omega$

$$\left(-2\varepsilon + \frac{-2b_\varepsilon(x)}{{t_m}^2\ v^2}\right) v^2(1-\chi_m) \geq -2\varepsilon v^2 + \frac{-2|b_\varepsilon(x)|}{{t_m}^2}$$

De las dos desigualdades anteriores se concluye que:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\lambda_1 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2\ v^2}\right) v^2(1-\chi_m) \geq -2\varepsilon v^2 + \frac{-2|b_\varepsilon(x)|}{{t_m}^2}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y para $c.t.$ $x \in \Omega$.

La función que está en el lado derecho de la desigualdad de arriba pertenece a $L^1(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, pues $v \in H_0^1(\Omega)$ y $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$.

La desigualdad de arriba implica que, para todo $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2(1-\chi_m) &\geq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(-2\varepsilon v^2 - \frac{2|b_\varepsilon|}{{t_m}^2}\right) \\ &= -\,2\varepsilon \int_\Omega v^2\end{aligned}$$

Luego

$$\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\lambda_1 - \frac{2F(x, t_m v)}{{t_m}^2\, v^2}\right) v^2(1-\chi_m) \geq 0.$$

Se ha probado (V.33) y (V.34).

De (V.30), (V.32), (V.33) y (V.34) se obtiene

$$\eta\left(\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega v^2\,\chi_m\right)\leq \liminf_{m\to\infty}\int_\Omega\left(\lambda_1-\frac{2F(x,t_mv)}{{t_m}^2\ v^2}\right)v^2\chi_m+$$

$$+\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega\left(\lambda_1-\frac{2F(x,t_mv)}{{t_m}^2\ v^2}\right)v^2(1-\chi_m)$$

$$\leq \liminf_{m\to\infty}\int_\Omega\left(\lambda_1-\frac{2F(x,t_mv)}{{t_m}^2\ v^2}\right)v^2$$

$$\leq 0.$$

Es decir

$$\eta\left(\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega v^2\,\chi_m\right)\leq 0.$$

Entonces

$$\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega v^2\,\chi_m=0.$$

Paso 2.7. Por los **pasos (2.1)**, **(2.2)** y **(2.5)**, $v\in H_0^1(\Omega)$, $v(x)\neq 0$ para todo $x\in\Omega$, para cada $m\in\mathbb{N}$ Ω_m es un conjunto medible Lebesgue incluido en Ω y existen $\delta>0$ y $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\mu_N(\Omega_m)>\delta$ para todo $m\geq n_0$.

Luego por la proposición V.2.1

$$\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega v^2\chi_m>0,$$

el cual contradice al **paso (2.6)** y esto se debe a que se ha supuesto que Φ no es coerciva, por lo tanto Φ es coerciva .

Paso 3. Demostraremos que existe $u_0\in H_0^1(\Omega)$, el cual minimiza el funcional $\Phi:\ H_0^1(\Omega)\ \to\ \mathbb{R}$ y es solución débil de (V.1).

Se probará que el funcional Φ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

Por hipótesis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, p satisface al condición (V.2), la función f es de Carathéodory y satisface la condición (V.3) y $h \in L^p(\Omega)$. Entonces por el teorema III.2.5 Φ es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ fijo, la derivada de Fréchet de Φ en u, $\Phi'(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, es dada por :

$$\Phi'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_\Omega f\big(x,u(x)\big)v(x)dx - \int_\Omega h(x)v\,(x)dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por los **pasos 1** y **2** y por la afirmación anterior $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d., coerciva y Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$. Luego por el teorema II.1.8 y la proposición II.2.8, existe una función $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ que minimiza el funcional Φ y

$$\Phi'(u_0)[v] = \int_\Omega \nabla u_0(x).\nabla v(x)dx - \int_\Omega f\big(x,u_0(x)\big)v(x)dx - \int_\Omega h(x)v\,(x)dx = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ minimiza el funcional Φ y es solución débil de (V.1).

Paso 4. Demostraremos que $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Dado $h \in L^p(\Omega)$.

Por el **paso 3**, u_0 es solución débil de (V.1), es decir $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u_0.\nabla v = \int_\Omega (f(x,u_0) + h)v$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Por el teorema III.2.1

$\big(f\big(x,u_0(x)\big) + h\big) \in L^p(\Omega)$, si $1 < p \leq 2$ y p satisface (V.2).

$\big(f\big(x,u_0(x)\big) + h\big) \in L^2(\Omega)$, si $2 < p$ y p satisface (V.2).

Como u_0 es solución débil de (V.1), entonces u_0 es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u_0) + h(x) & en\ \Omega\,, \\ \quad u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{V.35}$$

Probaremos por casos:

Caso I. Si p satisface (V.2) y $1 < p \leq 2$.

En este caso se utilizará el teorema I.3.12 (Regularidad de la solución débil). Por las afirmaciones anteriores u_0 es solución débil de (V.35) y $\big(f(x,u_0(x))+h\big)\in L^p(\Omega)$. Luego por el teorema I.3.12 se concluye que $u_0\in W^{2,p}(\Omega)$.

Caso II. Si p satisface (V.2) y $2<p$.

En este caso se utilizaran el corolario III.1.6., el teorema I.3.11. (teorema de inmersión de Sobolev) y el teorema I.3.12 (Regularidad de la solución débil).

Se sabe que u_0 es solución débil de (V.35) y $\big(f(x,u_0(x))+h\big)\in L^2(\Omega)$. Entonces por el teorema I.3.12 $u_0\in W^{2,2}(\Omega)$.

Sea $p_1=2$, entonces $u_0\in W^{2,p_1}(\Omega)$.

A continuación se probará que $u_0\in W^{2,p}(\Omega)$, para lo cual se dividirá en tres subcasos, de acuerdo a los casos dados en el teorema I.3.11 (teorema de inmersión de Sobolev).

Subcaso II.1. Si $N<2p_1$.

Por el teorema I.3.11 (teorema de inmersión de Sobolev)

$$W^{2,p_1}(\Omega)\ \rightarrow\ C^k(\overline{\Omega}),\quad k=0,1.$$

Como $u_0\in W^{2,p_1}(\Omega)$, entonces $u_0\in C^k(\overline{\Omega})$. Luego $u_0\in L^p(\Omega)$.

Desde que f es una función de Carathéodory que satisface la condición (V.3) y $u_0\in L^p(\Omega)$, se cumple (por corolario III.1.6) $f(x,u_0(x))\in L^p(\Omega)$.

La función $\big(f(x,u_0(x))+h\big)\in L^p(\Omega)$, pues $f(x,u_0(x))\in L^p(\Omega)$ y $h\in L^p(\Omega)$.

De las afirmaciones de arriba se tienen que u_0 es solución débil del problema (V.35) y $\big(f(x,u_0(x))+h\big)\in L^p(\Omega)$. Entonces por el teorema I.3.12 $u_0\in W^{2,p}(\Omega)$.

Subcaso II.2. Si $N=2p_1$.

Por el teorema I.3.11 (teorema de Inmersión de Sobolev)

$$W^{2,p_1}(\Omega)\ \rightarrow\ L^p(\Omega).$$

Como $u_0\in W^{2,p_1}(\Omega)$, entonces $u_0\in L^p(\Omega)$. Luego por el corolario III.1.6

$$f(x,u_0(x))\in L^p(\Omega).$$

La función $\big(f(x,u_0(x))+h\big)\in L^p(\Omega)$, pues $f(x,u_0(x))\in L^p(\Omega)$ y $h\in L^p(\Omega)$.

De las afirmaciones anteriores se tienen que u_0 es solución débil del problema (V.35) y $\big(f\big(x,u_0(x)\big)+h\big) \in L^p(\Omega)$. Entonces por el teorema I.3.12 $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Subcaso II.3 Si $N > 2p_1$.

Como $p_1 = 2 \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ y $2p_1 < N$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2 = p_1 < p_2 = \frac{Np_1}{N-2p_1} < \cdots < p_k = \frac{Np_{k-1}}{N-2p_{k-1}} < p_{k+1} = \frac{Np_k}{N-2p_k} \qquad (\text{V}.36)$$

y
$$2p_1 < 2p_2 < \cdots < 2p_k < N \leq 2p_{k+1} \qquad (\text{V}.37)$$

Por el teorema I.3.11 (teorema de inmersión de Sobolev) y la desigualdad (V.37)

$$W^{2,p_j}(\Omega) \to L^{p_{j+1}}(\Omega) \quad \text{para todo} \quad j = 1,2,\ldots,k. \qquad (\text{V}.38)$$

Afirmación 1. Si existe $j \in \{1,2,\ldots,k,(k+1)\}$ tal que $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j < p$, entonces $u_0 \in W^{2,p_j}(\Omega)$.

Se probará por inducción matemática está afirmación.

Sean $T = \{\, i \in \mathbb{N} \,/\, p_i < p \ \ entonces \ \ u_0 \in W^{2,p_i}(\Omega) \,\}$ y

$S = T \cup \{\, i \in \mathbb{N} \,/\, i \geq (k+2) \,\}$.

Por demostrar que $S = \mathbb{N}$.

a) $1 \in S$, pues $2 = p_1 < p$ implica $u_0 \in W^{2,p_1}(\Omega)$ (ver prueba en el inicio del **Caso II**).

b) Sea $i \in S$ se probará que $(i+1) \in S$.

b1) Si $i \in T$ y $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, se probará que $(i+1) \in T$ (luego $(i+1) \in S$).

Si $p_{i+1} < p$, por (V.36) $p_i < p_{i+1} < p$.

Como $i \in T$ y $p_i < p$, entonces $u_0 \in W^{2,p_i}(\Omega)$. Luego por (V.38)

$$u_0 \in L^{p_{i+1}}(\Omega).$$

Desde que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado y $1 \leq p_{i+1} < p$, se cumple

$$L^p(\Omega) \subseteq L^{p_{i+1}}(\Omega).$$

Luego por la condición (V.3)

Existe $A > 0$ y $B \in L^{p_{i+1}}(\Omega)$ tal que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \tag{V.39}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por el corolario III.1.6 y la relación (V.39)

$$f\big(x, u_0(x)\big) \in L^{p_{i+1}}(\Omega).$$

La función $h \in L^{p_{i+1}}(\Omega)$, pues $h \in L^p(\Omega)$ y $L^p(\Omega) \subseteq L^{p_{i+1}}(\Omega)$.

Como $f\big(x, u_0(x)\big) \in L^{p_{i+1}}(\Omega)$ y $h \in L^{p_{i+1}}(\Omega)$, entonces

$$\Big(f\big(x, u_0(x)\big) + h\Big) \in L^{p_{i+1}}(\Omega).$$

Se ha probado que u_0 es solución débil de (V.35) y $\Big(f\big(x, u_0(x)\big) + h\Big) \in L^{p_{i+1}}(\Omega)$.

Entonces por el teorema I.3.12

$$u_0 \in W^{2,p_{i+1}}(\Omega).$$

Por lo tanto $(i+1) \in T \subseteq S$.

b2) Si $i \in T$ y $i = k+1$.

Entonces $i + 1 = (k+2) \in \mathbb{N}$. Luego $(i+1) \in S$.

b3) Si $i \in \mathbb{N}$ y $i \geq (k+2)$.

Entonces $(i+1) \in \mathbb{N}$ y $(i+1) \geq (k+3) > (k+2)$. Luego $(i+1) \in S$.

Luego, por inducción matemática $S = \mathbb{N}$ y está igualdad implica

$$\{\, i \in \mathbb{N} \;/\; p_i < p \;\; entonces \;\; u_0 \in W^{2,p_i}(\Omega)\,\} = \{\, i \in \mathbb{N} \;/\; 1 \leq i \leq (k+1)\}$$

Por lo tanto, la **afirmación 1** es verdadera.

Afirmación 2 . Si existe $j \in \{1,2,\dots,k\}$ tal que $p_j < p \leq p_{j+1}$, entonces $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Sea $j \in \{1,2,\dots,k\}$ tal que $p_j < p \leq p_{j+1}$.Por la **afirmación 1** $u_0 \in W^{2,p_j}(\Omega)$. Luego por (V.38) $u_0 \in L^{p_{j+1}}(\Omega)$.

Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, $p \leq p_{j+1}$ y $u_0 \in L^{p_{j+1}}(\Omega)$, entonces $u_0 \in L^p(\Omega)$. Luego por el corolario III.1.6 $f\big(x, u_0(x)\big) \in L^p(\Omega)$.

La función $\left(f\left(x,u_0(x)\right)+h\right) \in L^p(\Omega)$, pues $f\left(x,u_0(x)\right) \in L^p(\Omega)$ y $h \in L^p(\Omega)$.

Se ha probado que u_0 es solución débil de (V.35) y $\left(f\left(x,u_0(x)\right)+h\right) \in L^p(\Omega)$. Entonces por el teorema I.3.12 $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Afirmación 3. Si $p_{k+1} < p$, entonces $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Supongamos que $p_{k+1} < p$. Por la **afirmación 1** y la relación (V.37)

$$u_0 \in W^{2,p_{k+1}}(\Omega) \quad \text{y} \quad N \le 2p_{k+1}.$$

Luego por los **subcasos II.1** y **II.2**

$$u_0 \in W^{2,p}(\Omega).$$

Afirmación 4. $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Por la relación (V.36)

$$\begin{aligned}]2,+\infty[&=]p_1,p_2] \cup]p_2,p_3] \cup \ldots \cup]p_k,p_{k+1}] \cup]p_{k+1},+\infty[\\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{k}]p_i,p_{i+1}]\right) \cup]p_{k+1},+\infty[\end{aligned}$$

Como $2 < p$, entonces $p_i < p \le p_{i+1}$ para algún $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ o $p_{k+1} < p$.

Si $p_i < p \le p_{i+1}$, **por la afirmación 2** $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Si $p_{k+1} < p$, **por la afirmación 3** $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Luego se ha probado que $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, cuando N y p_1 verifican la condición dada en el **subcaso II.3**.

Por lo demostrado en cada uno de los casos, se concluye que $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Por los pasos **3** y **4,** para todo $h \in L^p(\Omega)$, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ solución débil de (V.1), el cual minimiza el funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Con lo cual se ha probado el **teorema V.2.2.** ■

V.3. EJEMPLOS

En esta sección daremos algunos ejemplos de funciones $f(x,s)$ tales que f y F satisfacen las hipótesis del teorema V.2.2. Luego por este teorema, si p satisface la condición (V.2), entonces para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema (V.1) tiene por lo menos una solución débil en $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

Los ejemplos dados a continuación, son variantes de los ejemplos presentados en el artículo [6].

Ejemplo V.3.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet (homogénea) y p es un número que satisface la condición (V.2).

Se define la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,s) = \frac{\lambda_1}{16}s^2 + \frac{3\lambda_1}{16}s^2\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)),$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Se verifica que $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$ y que $F(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(x,s) &= \frac{dF}{ds}(x,s) \\ &= \frac{\lambda_1}{8}s + \frac{3\lambda_1}{8}s\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)) - \left[\frac{3\lambda_1}{8}\mathrm{sen}(\mathrm{Ln}(1+s^2))\left(\frac{s^3}{1+s^2}\right)\right], \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_0^s f(x,t)dt = F(x,s) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Verificando las hipótesis del teorema V.2.2.

La función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory pues $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$.

La función f satisface la condición (V.3) pues existen $A = \frac{7}{8}\lambda_1 > 0$ y $B \in L^p(\Omega)$ ($B(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$) tales que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

La función F satisface la condición (V.4) pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ ($b_\varepsilon(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$) tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \varepsilon s^2 + b_\varepsilon(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Resta verificar la condición (V.5).

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} = \frac{\lambda_1}{8} + \frac{3\lambda_1}{8}\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)) \, ,$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sea $\eta = \frac{\lambda_1}{8} > 0$. Entonces

$$\left\{ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

para todo $x \in \Omega$.

Luego, si $\eta = \frac{\lambda_1}{8}$ entonces

$$E(\Omega, \lambda_1 - \eta) = \bigcap_{x \in \Omega} \left\{ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \, .$$

$E(\Omega, \lambda_1 - \eta)$ es un conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Usando la igualdad anterior se prueba

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega, \lambda_1 - \eta) \cap [0, r])}{\mu_1([0, r])} = 1 > 0$$

y

$$\liminf_{r \to -\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega, \lambda_1 - \eta) \cap [r, 0])}{\mu_1([r, 0])} = 1 > 0 \, ,$$

cuando $\eta = \frac{\lambda_1}{8}$.

Se ha probado que existen $\Omega' = \Omega$ (Ω' conjunto medible Lebesgue incluido en Ω con $\mu_N(\Omega \setminus \Omega') = \mu_N(\emptyset) = 0$) y $\eta = \frac{\lambda_1}{8} > 0$ tal que $E(\Omega', \lambda_1 - \eta)$ tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$. Es decir la función F satisface la condición (V.5).

Por lo tanto f y F satisfacen las hipótesis del teorema V.2.2. Luego por este teorema, para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema (V.1) tiene por lo menos una solución débil que pertenece a $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

Ejemplo V.3.2. Sean $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^N$, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet (homogénea) y p es un número que satisface la condición (V.2).

Se define la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,s) = \frac{\lambda_1}{16}s^2 + \frac{3\lambda_1}{16}s^2\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)) + s\|x\|\,,$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Se verifica que $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$ y que $F(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,s) = \frac{dF}{ds}(x,s)$$

$$= \frac{\lambda_1}{8}s + \left[\frac{3\lambda_1}{8}s\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)) - \frac{3\lambda_1}{8}\mathrm{sen}(\mathrm{Ln}(1+s^2))\left(\frac{s^3}{1+s^2}\right)\right] + \|x\|$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_0^s f(x,t)dt = F(x,s) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Verificando las hipótesis del teorema V.2.2.

La función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory pues la función $\|x\|$ definida en Ω es medible Lebesgue en Ω y $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$.

La función f satisface la condición (V.3) pues existen $A = \frac{7}{8}\lambda_1 > 0$ y $B \in L^p(\Omega)$ ($B(x) = \|x\|$ para todo $x \in \Omega$) tales que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

La función F satisface la condición (V.4) pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ ($b_\varepsilon(x) = \frac{\|x\|^2}{4\varepsilon}$ para todo $x \in \Omega$) tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \varepsilon s^2 + b_\varepsilon(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ y para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Resta verificar la condición (V.5).

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} = \frac{\lambda_1}{8} + \frac{3\lambda_1}{8}\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2)) + \frac{2\|x\|}{s}$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sea $\eta = \frac{\lambda_1}{8} > 0$. Para cada $x \in \Omega$, el conjunto

$$\left\{ s \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;/\; \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \right\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pues $\dfrac{2F(x,s)}{s^2}$ es continuo en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Luego

$$E(\Omega,\lambda_1-\eta)=\bigcap_{x\,\in\,\Omega}\left\{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ /\ \frac{2F(x,s)}{s^2}\le\lambda_1-\eta\right\}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. De aquí $E(\Omega,\lambda_1-\eta)$ es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Sean

$$A_x=\left\{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,/\ \frac{\lambda_1}{8}+\frac{3\lambda_1}{8}\cos(\mathrm{Ln}(1+s^2))\le\frac{4\lambda_1}{8}\right\}$$

y

$$B_x=\left\{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ /\ \frac{2\|x\|}{s}\le\frac{3\lambda_1}{8}\right\}$$

para cada $x\in\Omega$.

Si $\eta=\dfrac{\lambda_1}{8}$ entonces

$$A_x\cap B_x\subseteq\left\{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ /\ \frac{2F(x,s)}{s^2}\le\lambda_1-\eta\right\}$$

para todo $x\in\Omega$.

Para todo $x\in\Omega$ se cumple

$$A_x=\mathbb{R}\setminus\{0\}\quad\text{y}\quad]-\infty,0[\ \cup\ \left]\frac{16}{3\lambda_1},+\infty\right[\ \subseteq B_x$$

Luego, si $\eta=\dfrac{\lambda_1}{8}$ entonces

$$]-\infty,0[\ \cup\ \left]\frac{16}{3\lambda_1},+\infty\right[\subseteq\left\{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ /\ \frac{2F(x,s)}{s^2}\le\lambda_1-\eta\right\}$$

para todo $x\in\Omega$.

La inclusión anterior implica

$$]-\infty,0[\ \cup\ \left]\frac{16}{3\lambda_1},+\infty\right[\subseteq E(\Omega,\lambda_1-\eta)$$

Usando la inclusión de arriba se prueba

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega,\lambda_1-\eta)\cap[0,r])}{\mu_1([0,r])} = 1 > 0$$

y

$$\liminf_{r\to-\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega,\lambda_1-\eta)\cap[r,0])}{\mu_1([r,0])} = 1 > 0\,,$$

cuando $\eta = \frac{\lambda_1}{8}$.

Se ha probado que existen $\Omega' = \Omega$ (Ω' conjunto medible Lebesgue incluido en Ω con $\mu_N(\Omega \setminus \Omega') = \mu_N(\emptyset) = 0$) y $\eta = \frac{\lambda_1}{8} > 0$ tal que $E(\Omega',\lambda_1-\eta)$ tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$. Es decir la función F satisface la condición (V.5).

Por lo tanto f y F satisfacen las hipótesis del teorema V.2.2. Luego por este teorema, para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema (V.1) tiene por lo menos una solución débil que pertenece a $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

Ejemplo V.3.3. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet (homogénea) y p es un número que satisface la condición (V.2).

Sea

$$g(s) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s^2}{2(1+s^2)}\right) ,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Se define la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,s) = \frac{\lambda_1}{4}s^2 - g(s)s^2$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Se verifica que $g \in C^1(\mathbb{R})$. De aquí $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$. Además se cumple que $F(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(x,s) &= \frac{dF}{ds}(x,s) \\ &= \frac{\lambda_1}{2}s - g'(s)s^2 - 2g(s)s \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

Aplicando propiedades de derivación de funciones y regla de la cadena se obtiene

$$g'(s) = -\left[\cos\left(\frac{\pi s^2}{2(1+s^2)}\right)\right]\frac{\pi s}{(1+s^2)^2},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_0^s f(x,t)dt = F(x,s) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{y para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

La función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory pues $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$.

La función f satisface la condición (V.3) pues existen $A = \frac{1}{2}\lambda_1 + 4 + \frac{\pi}{4} > 0$ y $B \in L^p(\Omega)$ ($B(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$) tales que

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{y para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

La función F satisface la condición (V.4) pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $b_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ ($b_\varepsilon(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$) tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \varepsilon s^2 + b_\varepsilon(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{y para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

La función F satisface la condición (V.5) pues existen $\Omega' = \Omega$ (Ω' conjunto medible Lebesgue incluido en Ω con $\mu_N(\Omega \setminus \Omega') = \mu_N(\emptyset) = 0$) y $\eta = \frac{\lambda_1}{2} > 0$ tal que $E(\Omega', \lambda_1 - \eta)$ es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$,

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega', \lambda_1 - \eta) \cap [0,r])}{\mu_1([0,r])} = 1 > 0$$

y

$$\liminf_{r \to -\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega', \lambda_1 - \eta) \cap [r,0])}{\mu_1([r,0])} = 1 > 0.$$

Es decir $E(\Omega', \lambda_1 - \eta)$ tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$.

Por lo tanto f y F satisfacen las hipótesis del Teorema V.2.2. Luego por este teorema, para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema (V.1) tiene por lo menos una solución débil que pertenece a $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Dividimos este capítulo en dos secciones: resumen de los capítulos II, III, IV y V y conclusiones.

VI.1 RESUMEN DE LOS CAPÍTULOS II, III, IV y V

En el capítulo II se estudió la minimización de funcionales secuencialmente semicontinuos inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.) y la derivada de Fréchet.

Los resultados más importantes del capítulo II son el teorema II.1.8 y la proposición II.2.8. En el teorema II.1.8 se probó que todo funcional definido en un espacio de Banach reflexivo que es secuencialmente semicontinuo inferiomente (s.s.c.i.d.) y coercivo posee un punto mínimo en dicho espacio, para la prueba de este teorema se aplicó el teorema I.1.16. La proposición II.2.8 nos da las condiciones suficientes para que un funcional definido en un espacio de Banach posea punto crítico. El corolario II.2.9 es consecuencia de estos resultados. El teorema II.1.8 y la proposición II.2.8 son de utilidad en el capítulo V, pues estos dos resultados nos muestran el camino que debemos seguir en la demostración del teorema V.2.2.

En el capítulo III se define la función de Nemytskii, esta función se usa para probar que el funcional Φ que se define en la sección III.2 es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ (ver teorema III.2.1, teorema III.2.4 y teorema III.2.5). La función de Nemytskii también es de utilidad en el capítulo V, aquí se demuestra que si u_0 es solución débil de (V.1), entonces $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, donde p satisface la condición (V.2) (ver paso 4 del teorema V.2.2).

El objetivo en el capítulo IV es probar la proposición IV.2.4, que se demuestra usando resultados de reordenamiento de Schwarz. Esta proposición se aplica para probar que el funcional Φ es coercivo (ver demostración del teorema V.2.2).

En el capítulo V se dan cuatro condiciones ((V.2), (V.3), (V.4) y (V.5)) que garantizan la existencia de la solución débil de (V.1) para todo $h \in L^p(\Omega)$.

El resultado principal de este trabajo está enunciado en el teorema V.2.2, en este teorema se demuestra la existencia de solución débil del problema de Dirichlet semilineal (V.1) y que esta solución pertenece a $W^{2,p}(\Omega)$, donde p satisface la condición (V.2). En la prueba de este teorema se define el funcional $\Phi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dicho funcional es tal que los puntos críticos de Φ son las soluciones débiles de (V.1). Según el teorema II.1.8 y la proposición II.2.8 para probar la existencia del punto crítico de Φ se tiene que demostrar que Φ es s.s.c.i.d., coercivo y Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

La demostración del teorema V.2.2 está divida en cuatro pasos. En el paso 1 se demuestra que Φ es secuencialmente semicontinua inferiormente débilmente (s.s.c.i.d.) para la cual se expresa Φ como suma de tres funcionales, es decir

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 .$$

Por la proposición II.1.5, para probar que Φ es s.s.c.i.d. es suficiente probar que Φ_1, Φ_2 y Φ_3 sean s.s.c.i.d.

Se aplica la proposición II.1.2 para probar que Φ_1 es s.s.c.i.d. Usando la condición (V.4), $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto acotado y aplicando algunos resultados de capítulos anteriores (por ejemplo el Lema de Fatou y $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\to} L^2(\Omega)$) se prueba que Φ_2 es s.s.c.i.d. La condición (V.2) y Ω conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^N$ implican que Φ_3 es s.s.c.i.d. Aplicando la proposición II.1.5 se concluye que Φ es s.s.c.i.d.

En el paso 2 se demuestra que Φ es coerciva por contradicción. Se supone que Φ no es coerciva y usando que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, p satisface la condición (V.2), $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que satisface la condición (V.3), F satisface la condición (V.4) y la condición (V.5) se prueba:

a) Existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$.

b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe Ω_m conjunto medible Lebesgue incluido en Ω.

c) Existen $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_N(\Omega_m) > \delta$ para todo $m \geq n_0$.

d)

$$\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega v^2\, \chi_m = 0,$$

siendo χ_m la función característica del conjunto Ω_m para cada $m \in \mathbb{N}$.

Pero por la proposición V.2.1 se tiene que

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega} v^2 \chi_m > 0$$

Esta desigualdad contradice d). Por lo tanto Φ es coerciva.

En a) se prueba que v es una función propia asociada al valor propio λ_1, para lo cual se usa que Φ no es coerciva, Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, p satisface la condición (V.2), F satisface la condición (V.4) y se aplica el teorema I.4.4. Luego por el teorema I.4.8, $v > 0$ en Ω o $v < 0$ en Ω. En consecuencia $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$.

Para probar c) se aplica la proposición IV.2.4, aquí se necesita de una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}$ que se anula en la $\partial\Omega$. Esta función se obtiene por medio del teorema I.4.7. Este teorema nos da las condiciones suficientes para que la extensión continua en $\overline{\Omega}$ de la función propia asociada al valor propio λ_1 sea una función de Lipschitz en $\overline{\Omega}$ que se anula en $\partial\Omega$.

En el paso 3 se prueba que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, el cual minimiza Φ y es solución débil de (V.1). Aquí se usa que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, p satisface la condición (V.2), f es una función de Caratheodory que satisface la condición (V.3) y $h \in L^p(\Omega)$, luego se aplica los teoremas III.2.5, II.1.8 y la proposición II.2.8.

En el paso 4 se prueba que $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, sabiendo que por el paso 3 u_0 es solución débil de (V.1). En este paso se usa que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, las condiciones (V.2) y (V.3) y se aplican el teorema III.2.1, el teorema I.3.12 (regularidad de la solución débil), corolario III.1.6 (función de Nemytskii) y el teorema I.3.11 (teorema de inmersión de Sobolev). También en el paso 4 está incluida la demostración del siguiente resultado:

Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, $2 < p$, p satisface la condición (V.2), $h \in L^p(\Omega)$, f es una función de Caratheodory que satisface la condición (V.3), u_0 es solución débil de (V.1), $2 \leq q_1 < q_2 < p$, $u_0 \in W^{2,q_1}(\Omega)$ y $W^{2,q_1}(\Omega) \to L^{q_2}(\Omega)$ es una inmersión continua. Entonces $u_0 \in W^{2,q_2}(\Omega)$. Para demostrar este resultado se aplica el corolario III.1.6 y el teorema I.3.12.

Por último en la sección 3 del capítulo V se dan algunos ejemplos de funciones f tales que f y F satisfacen las hipótesis del teorema V.2.2, la construcción de la función f se hace a partir de la construcción de la función F, esta última función se construye hallando condiciones sobre F que impliquen que f es una función de Caratheodory y cumplan las condiciones (V.3), (V.4) y (V.5). Empezamos la construcción de F usando la condición (V.4), esta condición nos da la idea de cómo debe ser la función F, luego se usa la condición f es función de Caratheodory y después las condiciones (V.3) y (V.5).

VI.2 CONCLUSIONES

1. Si E es un espacio de Banach reflexivo, $\Phi : E \to \mathbb{R}$ es s.s.c.i.d y coercivo, el teorema II.1.8 afirma que Φ posee por lo menos un mínimo en E.

2. Si E es un espacio de Banach, $\Phi: E \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en E y u_0 es un punto mínimo de Φ en E, la proposición II.2.8 establece que

$$\Phi'(u_0) = 0.$$

3. Si E es un espacio de Banach reflexivo, Φ es un funcional s.s.c.i.d., coercivo y Fréchet diferenciable en E, por el corolario II.2.9 concluimos que existe $u_0 \in E$ tal que

$$\Phi'(u_0) = 0.$$

4. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory, existe una constante $A > 0$, una función $B \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ y $r > 0$ con $qr \geq 1$ tal que

$$|f(x,s)| \leq A|s|^r + B(x),$$

   $c.t.\ x \in \Omega$, para todo $s \in \mathbb{R}$, el teorema III.1.5 nos permite demostrar que la función de Nemytskii $N_f : L^{qr}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ es continua y acotada.

5. Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, p satisface la condición (III.5), f es una función de Caratheodory que satisface la condición (III.6), $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ para $c.t.\ x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$ y $h \in L^p(\Omega)$, el teorema III.2.5 nos permite concluir que el funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_{\Omega} F\big(x, u(x)\big)dx - \int_{\Omega} h(x)u(x)dx,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ y para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, la derivada de Fréchet de Φ en u, es

$$\Phi'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx - \int_{\Omega} h(x)v(x)dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

6. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto, conexo, acotado y no vacío, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz no constante el cual se anula en $\partial\Omega$ y B es un conjunto de Borel en el $Ran(u)$, la proposición IV.2.4 garantiza la existencia de una constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\mu_N\big(u^{-1}(B)\big) \geq C\ \frac{\mu_1(B)^N}{Lip(u)^N}$$

donde μ_1 y μ_N denotan la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^N$ respectivamente.

7. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto y conexo) acotado de clase C^2, p satisface la condición (V.2), f es una función de Caratheodory que satisface la condición (V.3), F satisface las condiciones (V.4) y (V.5) y $h \in L^p(\Omega)$, el teorema V.2.2 permite probar que existe una función $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ que es solución débil de (V.1).

8. La solución u_0 encontrada en el teorema V.2.2 resulta ser el mínimo del funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) - \int_{\Omega} h\,u\ ,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **ADAMS, R. A.,** *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] **AGMON, S.,** *The L^P approach to the Dirichlet problem. Part I : regularity theorems*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 4 , p. 405 – 448, 1959.

[3] **AMBROSETTI, A. y MALCHIODI, A.,** *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007.

[4] **BANDLE, C.,** *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, 1980.

[5] **BREZIS, H.,** *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[6] **DE FIGUEIREDO, D. G. y GOSSEZ, J. - P.,** *Nonresonance Below the First Eigenvalue for a Semilinear Elliptic Problem,* Math. Ann. 281, 589 - 610 (1988).

[7] **DE FIGUEIREDO, D. G.,** *The Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research, 1989.

[8] **DE GUZMAN, M. y RUBIO, B.,** *Integración: Teoría y Técnicas*, Alhambra, 1979.

[9] **GILBARG, D. y TRUDINGER, N.S.,** *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2001.

[10] **HENROT, A.,** *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhäuser Verlag, 2006.

[11] **KESAVAN, S.,** *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, 1989.

[12] **WHEEDEN, R.L. y ZYGMUND, A.,** *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis,* Marcel Dekker, Inc., 1977.